2025 期末 · 5 套真题 · 从头学

概率论与数理统计
期末通关

这本按"**没学过也能跟上**"来写：每个概念先问"为什么要有它"，公式推一遍，再配真题。**四套往年卷子全部收进来，按讲归位。**

目录

00 这门课到底在干什么
01 事件与概率：把"可能"变成数
02 古典概型与计数
03 条件概率、全概率、贝叶斯
04 独立性
05 随机变量与分布函数
06 常见离散分布
07 常见连续分布
08 二维随机变量与联合分布
09 边缘分布、条件分布与独立性
10 随机变量函数的分布
11 数字特征：期望、方差、协方差
12 大数定律与中心极限定理
13 数理统计基础：三大分布
14 参数估计：矩估计与极大似然
15 区间估计
16 假设检验
17 整卷速查

00 这门课到底在干什么

8 分钟 · 先看地图

概率论一半是"算"，一半是"翻译"。翻译对了，算就是套公式。

> **一句话：**这门课分两半 —— **前一半（1–4 章）研究"随机的东西长什么样"，后一半（5–8 章）研究"拿到一堆数据怎么反推规律"**。

卷面结构

题型	题量	分值	考什么
选择题	5 题	4 × 5 = 20	概念辨析：谁决定谁、能不能、等不等
填空题	5 题	4 × 5 = 20	一步算完，多考公式而不是思路
解答题	6 题	10 × 6 = 60	完整流程，按步给分

? 你可能已经注意到：**40 分是"知道就会"的题**，60 分是"会流程就有分"的题。
所以这本书的力气分配是：**概念讲透 → 公式推一遍 → 六类解答题各给一套固定流程**。

八个模块，二十讲

模块	讲	一句话
一、事件与概率	01–04	把"可能性"变成一个 0~1 的数
二、随机变量	05–07	给随机的结果编上号，再研究号怎么分布
三、二维随机变量	08–10	两个号一起看，看它们关不关心彼此
四、数字特征	11	不关心全貌，只关心"平均"和"散得多开"
五、极限定理	12	样本一多，什么都变正态
六、数理统计基础	13	从数据里造出三个万能统计量
七、参数估计	14–15	用数据猜参数，猜一个值 / 猜一个范围

八、假设检验	16	先假设，再看数据打不打脸

两个开关

开关	作用	什么时候用
知识 + 题目 / 只看题目	切到"只看题目"，讲解全部隐藏，只剩题	第二轮自测
会 / 卡 / 不会	每道题右上角打标，可多选筛选	第三轮只看"不会"

每讲末尾的「历年真题」区，收着 **2025 / 2024 / 2023 / 2022** 四套卷子里属于这一讲的题。答案默认折叠。

⚠ **三个先别做：** ① 别一上来背分布表；② 别跳过"分布函数"直接学密度；③ 别把"独立"和"互斥"混为一谈——**这是全课第一大坑。**

01 事件与概率：把"可能"变成数

35 分钟

这一讲只干一件事：把中文句子翻译成集合运算。

> **一句话：**事件就是**集合**。"A 发生"= 点落在 A 里；概率就是给每个集合**称重**，总重为 1。

? "至少有一个发生""恰好有一个发生""都不发生"—— 这三句话，你能立刻写成集合式子吗？
考试里一半的错，都是这句话没翻译对。

先讲清楚

一、四个基本运算

说法	符号	含义
A 与 B 都发生	AB 或 $A \cap B$	同时落在两块里
A 或 B 发生	$A \cup B$	至少有一个
A 不发生	$\overline{A}$	补集

A 发生而 B 不发生	$A\overline{B}=A-B$	在 A 里但不在 B 里

二、把中文翻成符号（最值钱的表）

中文	式子
至少有一个发生	$A\cup B$
一个都不发生	$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$
恰好有一个发生	$A\overline{B}\cup\overline{A}B$
最多有一个发生	$\overline{AB}$
都不发生与至少一个发生是**对立**的	两者概率相加 = 1

停一下："A、B 至少有一个不发生"怎么写?

就是 $\overline{AB}$：只要不是"两个都发生"就行。

也等于 $\overline{A}\cup\overline{B}$。**这两个写法等价，考试随便用。**

三、概率的三条公理与常用性质

① 非负：$P(A)\geq 0$；② 归一：$P(\Omega)=1$；③ 可加：互不相容时 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

由此推出天天用的四条：

- $P(\overline{A})=1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ **（减法公式）**
- $P(A-B)=P(A)-P(AB)$
- $A\subset B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$

四、互斥 vs 独立：全课第一大坑

	互不相容（互斥）	相互独立
式子	$AB=\varnothing$，$P(AB)=0$	$P(AB)=P(A)P(B)$
直觉	**不能同时发生**	**互不影响**

关系	若 $P(A),P(B)>0$：**互斥一定不独立**；独立一定不互斥

为什么？ 互斥时"知道 A 发生了"就说明 B 不可能发生，这分明是强影响 —— 当然不独立。

必背 · 五条

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$	减法公式
$P(\overline{A})=1-P(A)$	对立事件
$P(A-B)=P(A)-P(AB)$	差事件
互斥 $\Rightarrow P(AB)=0$	独立 $\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$
$A\subset B\Rightarrow P(A)\le P(B)$	单调性

例 1.1 基础 减法公式

已知 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，$P(AB)=0.2$。求 $P(A\cup B)$、$P(\overline{AB})$、$P(A-B)$。

$P(A\cup B)=0.6+0.4-0.2=0.8$

$P(\overline{AB})=P(\overline{A\cup B})=1-0.8=0.2$

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.6-0.2=0.4$

⚠ **两个坑：** ① 看见"至少"就想用对立事件，别硬算；② **互斥 ≠ 独立**，见到"互不相容"四个字先在心里画个红叉。

自测 · 3 道

1. $P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，A、B 互斥。求 $P(A\cup B)$。
2. A、B 独立且 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$。求 $P(AB)$ 和 $P(A\cup B)$。
3. "A、B 都不发生"的概率怎么用 $P(A\cup B)$ 表示?

1. 0.8（互斥直接相加）。

2. $P(AB)=0.2$，$P(A\cup B)=0.5+0.4-0.2=0.7$。

3. $1-P(A\cup B)$。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 选1 3 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

设事件 A 与事件 B 互不相容，且 $P(B)>0$，则下列结论正确的是（ ）。

A. $P(\overline{AB})=0$　B. $P(\overline{AB})=1$（$\overline{A}$、$\overline{B}$ 至少一个发生）

C. $P(A|B)=P(A)$　D. $P(A)=1-P(B)$

一句话：这道题就是考"互不相容"：两个事件不可能同时发生。

① 互不相容即 AB 为空集，所以 $P(AB)=0$。

② 对偶律：$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的并恰好是 $\overline{AB}$。

关键式子：$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0=1$ ③ **注意：互不相容不等于独立，此时 $P(A|B)=0$ 而非 $P(A)$。**

④ 得出：**答案 B**

2024 卷 · 真题 2 道

2024 · 选1　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

设 A、B 为两个随机事件，且 $A\overline{B}=\Phi$，则下列表达正确的是____。

A. $P(\overline{AB})=0$　B. $P(A)\leq P(B)$　C. $P(AB)>0$　D. $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

一句话：把 $A\overline{B}=\Phi$ 翻译成 $A\subseteq B$。

① $A\overline{B}$ 表示"A 发生且 B 不发生"，题设为空。

② 所以 A 发生必有 B 发生，即 $A\subseteq B$。

③ 关键式子：$A\subseteq B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$。

④ D 左边恒为 0，而右边一般不为 0，排除。

答案 B

2024 · 填1　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.2$，则 $P(A\overline{B})$ 的最大值为____，最小值为____。

一句话：化成 $P(A)-P(AB)$，只需求 $P(AB)$ 的范围。

① $P(A\overline{B})=0.5-P(AB)$。

② $P(AB)$ 最大为 $\min(0.5,0.2)=0.2$。

③ 因为 $P(A)+P(B)=0.7<1$，两者可以互斥，最小值是 0。

④ 关键式子：$0.5-0.2\leq P(A\overline{B})\leq 0.5-0$。

答案 最大 0.5，最小 0.3

2023 卷 · 真题 1 道

2023 · 选1　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

设 A、B、C 为三个随机事件，则 $AB \cup BC \cup AC$ 表示 ____。

A. A、B、C 至少发生一个

B. A、B、C 至少发生两个

C. A、B、C 至多发生两个

D. A、B、C 至多发生一个

一句话：看 AB、BC、AC 三项并起来对应哪种事件。

① AB 表示 A 与 B 同时发生，BC、AC 同理。

② 三者取并，就是"至少有一对同时发生"。

③ 这等价于**至少发生两个**。

④ 恰好一个发生时三项全不成立，被排除。

答案 B（原卷参考答案给 D，应为 B）

2022 卷 · 真题 1 道

2022 · 选1　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

设 A,B 是随机事件，且 $AB=\overline{AB}$，则（ ）。

(A) $A \cup B=\Phi$　(B) $A \cup B=\Omega$　(C) $A \cup B=A$　(D) $A \cup B=B$

一句话：AB 与 $A \cup B$ 互为对立，等式逼出 $A \cup B=\Omega$。

① $\overline{AB}$ 正是 $A \cup B$ 的对立事件。

② 又 AB 含于 $A \cup B$，互补的两个集合不能有公共元素。

③ 关键式子：$AB=\overline{A \cup B}$ 且 $AB \subseteq A \cup B \Rightarrow$ 两者都为空/满。

④ 故 $AB=\Phi$，$A \cup B=\Omega$。

答案 B

02 古典概型与计数

30 分钟

古典概型只有一句：**数分子，数分母，相除**。难的是数。

一句话：当所有基本结果**等可能**且**有限**时，$P(A)=\dfrac{\text{A 包含的结果数}}{\text{总结果数}}$。

? 从 10 个球里取 2 个，有几种取法?
如果球是"同时取"，顺序无所谓，用组合；如果"一个一个取"，顺序有关，用排列。**用错就是 2 倍误差。**

先讲清楚

一、三个计数工具

情形	公式
从 n 个里取 k 个（不管顺序）	$\dfrac{n}{k}=C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
从 n 个里排 k 个（管顺序）	$A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$
n 个全排列	$n!$

判断口诀："**取出**"用组合，"**排成一列/依次**"用排列。摸球、抽签、分组都是组合。

二、几何概型

样本空间是**区域**时，概率 = 面积（长度、体积）之比：

$$P=\frac{\text{有利区域面积}}{\text{总区域面积}}$$

经典题：会面问题、投点问题、两数之和。**画图永远不会错。**

三、抽签公平性

不放回地抽签，**每个人抽中的概率都一样**，与顺序无关。这就是为什么抽签是公平的。

证明很简单：第 k 个人抽中 = 前面的人都没抽中，用乘法公式算出来正好是 $1/n$。

必背 · 四条

$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	组合，无序
$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$	排列，有序
$P=$ 有利数 ÷ 总数	等可能才行
几何概型 = 面积比	画图

例 2.1 标准　摸球

袋中 7 新 3 旧共 10 球，任取 2 个。求：(1) 都是新球；(2) 一新一旧。

总数 $C_{10}^2=45$。

(1) $C_7^2=21 \Rightarrow P=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$

(2) $C_7^1C_3^1=21 \Rightarrow P=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$

注意：这里"任取 2 个"是同时取，用组合。

⚠ **三个坑：** ① 有序/无序用混；② 分母漏数；③ 几何概型忘了"等可能"的前提。

自测 · 2 道

1. C_5^2 等于多少?
2. 3 个人排成一排，有多少种排法?

1. 10。

2. $3!=6$。

2023 卷 · 真题 1 道

2023 · 解答1

○ 会　○ 卡　○ 不会

甲、乙两种味道颜色极相似的名酒各 4 杯，挑 4 杯能把甲种全挑出算成功。(1) 随机猜，成功一次的概率；(2) 连续 10 次成功 3 次，判断他是否真有区分能力。

一句话：先算古典概型 $\frac{1}{70}$，再用二项说明"猜不出来"。

① 8 杯任挑 4 杯，总数 $C_8^4=70$。

② 只有挑中甲那 4 杯才行：$P=\frac{1}{70}$。

③ 若纯猜，成功次数 $Y\sim b(10,\frac{1}{70})$。

④ $P\{Y=3\}=C_{10}^3(\frac{1}{70})^3(\frac{69}{70})^7\approx 0.0003$。

⑤ 小概率事件几乎不发生，故可认为他确有区分能力。

答案 (1) $\frac{1}{70}$；(2) 猜对概率约 0.0003，认为确有区分能力

03 条件概率、全概率、贝叶斯

40 分钟 · 解答题第一道几乎必考

这一讲是整本书**最值钱**的一讲。

一句话：条件概率 = **把样本空间缩小到"已知发生的那块"**，再算比例。**全概率是"分情况"，贝叶斯是"倒着想"。**

? 一个工厂三条生产线，次品率各不相同。随便拿一个产品，它是次品的概率？
反过来，已知它是次品，它来自第一条线的概率？
这两个问题，就是全概率和贝叶斯的区别。

先讲清楚

一、条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad (P(B)>0)$$

读法：**在 B 已经发生的世界里，A 占多大比例。**分母换成 $P(B)$，就是"世界缩小了"。

二、乘法公式

$$P(AB)=P(B)P(A|\,B)=P(A)P(B|\,A)$$

三个事件：$P(ABC)=P(A)P(B|\,A)P(C|\,AB)$。**链式相乘，一个一个往下剥。**

三、全概率公式：分情况讨论的数学版

若 $B_1,\dots,B_n$ 是样本空间的一个**划分**（互不相容且并起来是全部），则

$$P(A)=\Sigma_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|\,B_i)$$

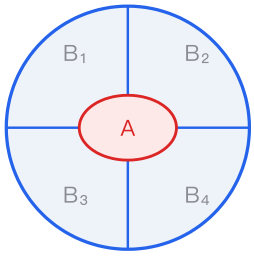
怎么用：题目里出现"**分几类/几条线/几种来源**"，就先把它当划分 B_i，再写"每类的概率 × 该类下 A 的概率"，全加起来。

四、贝叶斯公式：倒着推

$$P(B_i|\,A)=\frac{P(B_i)P(A|\,B_i)}{\Sigma_j P(B_j)P(A|\,B_j)}$$

分子 = 你关心的那条路；分母 = 全概率（所有路之和）。

一句话记：**贝叶斯 = 这一条 ÷ 全部。**



把样本空间切成几块

全概率：各块 × 块内比例，再相加

贝叶斯：其中一块 ÷ 全部

分母永远是全概率

图 1：全概率是"横向汇总"，贝叶斯是"纵向回推"。

停一下：三台机器产量分别占 50%、30%、20%，次品率 1%、2%、3%。求任取一件是次品的概率。

直接套全概率：

$$P=0.5\times0.01+0.3\times0.02+0.2\times0.03=0.005+0.006+0.006=0.017$$

即 1.7%。**注意每一项都是"占比 × 该类的次品率"。**

必背 · 四条

$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$	条件概率
$P(AB)=P(B)P(A\mid B)$	乘法公式
$P(A)=\Sigma\, P(B_i)P(A\mid B_i)$	全概率
$P(B_i\mid A)=\dfrac{\text{这一条}}{\text{全部}}$	贝叶斯

2025 · 解答 1 真题 新球旧球

盒中 10 个乒乓球，7 新 3 旧。第一次取 2 个用后放回（新球变旧球），第二次再取 2 个。(1) 第二次都是新球的概率；(2) 已知第二次都是新球，求第一次都是新球的概率。

第 1 步：设事件。A_i = 第一次取到 i 个新球（i=0,1,2），B_2 = 第二次取到 2 个新球。

第 2 步：算各 A_i 的概率。$P(A_0)=\dfrac{C_3^{\,2}}{C_{10}^{\,2}}=\dfrac{3}{45}$，$P(A_1)=\dfrac{C_7^{1}C_3^{1}}{45}=\dfrac{21}{45}$，$P(A_2)=\dfrac{C_7^{2}}{45}=\dfrac{21}{45}$。

第 3 步：算条件概率。第一次用掉 i 个新球后，盒中剩 $7\text{-}i$ 个新球：$P(B_2\mid A_i)=\dfrac{C_{7-i}^{\,2}}{45}$

第 4 步：全概率。$P(B_2)=\Sigma\, P(A_i)P(B_2\mid A_i)=\dfrac{21}{45}\cdot\dfrac{3}{45}+\dfrac{15}{45}\cdot\dfrac{21}{45}+\dfrac{10}{45}\cdot\dfrac{21}{45}=\dfrac{196}{675}$

第 5 步：贝叶斯。$P(A_2\mid B_2)=\dfrac{P(B_2\mid A_2)P(A_2)}{P(B_2)}=\dfrac{10}{45}\cdot\dfrac{21}{45}\cdot\dfrac{675}{196}=\dfrac{5}{14}$

固定流程：设事件 → 找划分 → 算划分概率 → 算条件概率 → 全概率 → 贝叶斯。

⚠ **三个坑：**① 划分漏掉一种情况（比如"取 0 个新球"）；② 用球后**新球变旧球**，数量要跟着改；③ 贝叶斯分子写成 $P(A\mid B_i)$ —— 顺序反了。

自测 · 3 道

1. $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(AB)=0.2$。求 $P(A|B)$。
2. 全概率公式的分母需要什么条件?
3. 贝叶斯公式的分子是什么?

1. $0.2/0.4=0.5$。

2. B_i 要构成划分（互斥且完备）。

3. $P(B_i)P(A|B_i)$，就是你关心的那条路的概率。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 解答1

○ 会　○ 卡　○ 不会

盒中有 10 个乒乓球，其中 7 个是新的。第一次比赛时从盒中任取 2 个，用后仍放回盒中（新球使用后变为旧球），第二次比赛时再从盒中任取 2 个。

（1）求第二次取出的球都是新球的概率；

（2）若已知第二次取出的球都是新球，求第一次取到的球都是新球的概率。

一句话：这道题就是两段摸球的全概率加贝叶斯，第一段改了盒中比例。

① 设 A_i 为第一次取到 i 个新球（$i=0,1,2$），B_2 为第二次两球全为新球。

② 第一次用后，盒里剩新球 $7-i$ 个、旧球 $3+i$ 个。

关键式子：$P(B_2)=\Sigma_{i=0}^{2}\frac{C_{7-i}^{2}}{C_{10}^{2}}\cdot\frac{C_7^{i}C_3^{2-i}}{C_{10}^{2}}$ ③ 代入三类情况：

$$\frac{21}{45}\cdot\frac{3}{45}+\frac{15}{45}\cdot\frac{21}{45}+\frac{10}{45}\cdot\frac{21}{45}=\frac{196}{675}。$$

④ 第二问是已知结果反推原因，用贝叶斯公式。

关键式子：$P(A_2|B_2)=\frac{10}{45}\cdot\frac{21}{45}\cdot\frac{675}{196}=\frac{5}{14}$ ⑤ **注意：新球用过即变旧，第二次不能仍按 7 个新球算。**

⑥ 得出：**答案（1）$\frac{196}{675}$；（2）$\frac{5}{14}$**

2024 卷 · 真题 1 道

2024 · 解答1

○ 会　○ 卡　○ 不会

每箱次品率 0.1，各箱独立。任选两箱各取 1 只：两正品则买下；一正一次则再选一箱抽 1 只，正品则买下；两只次品则拒绝。求 (1) 买下的概率；(2) 已知买下，求一开始两只都是正品的概率。

一句话：按"第一次两只里有几个次品"分三种情况。

① 划分：B_1 两正、B_2 一正一次、B_3 两次。

② $P(B_1)=0.81$，$P(B_2)=0.18$，$P(B_3)=0.01$。

③ 条件：$P(A\mid B_1)=1$，$P(A\mid B_2)=0.9$，$P(A\mid B_3)=0$。

④ 关键式子：$P(A)=0.81+0.18\times0.9=0.972$。

⑤ 贝叶斯：$P(B_1\mid A)=\dfrac{0.81}{0.972}\approx0.833$。

答案 (1) 0.972；(2) 约 0.833

2023 卷 · 真题 1 道

2023 · 填1　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

已知 $P(A)=0.6$，$P(AB)=0.3$，则 $P(A\overline{B})=$ ____，$P(\overline{B}\mid A)=$ ____。

一句话：把 A 拆成两块再用条件概率。

① $A=AB\cup A\overline{B}$ 互不相容。

② 关键式子：$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.3$。

③ $P(\overline{B}\mid A)=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\dfrac{0.3}{0.6}=0.5$。

答案 0.3；0.5

2022 卷 · 真题 2 道

2022 · 填1 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

发病率 0.01，A=被感染，B=检测阴性，$P(B|A)=0.4$，$P(B|\overline{A})=1$。若检测为阴性，实际被感染的概率为 ____。

一句话：贝叶斯，分子是"真感染且阴性"，分母是全概率。

① $P(B)=0.01\times0.4+0.99\times1=0.994$。

② 关键式子：$P(A|B)=\dfrac{0.01\times0.4}{0.994}=\dfrac{2}{497}$。

③ 数值约 0.004，概率很低。

答案 $\boldsymbol{\dfrac{2}{497}}$

2022 · 解答1

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

8 球 4 白 4 黑，任取 4 只放甲盒、其余放乙盒，再从两盒各取 1 只。(1) 两球同色的概率；(2) 已知同色，甲盒中几只白球概率最大。

一句话：按甲盒白球数分五种情况，全概率 + 贝叶斯。

① 设 B_i = 甲盒有 i 只白球，$i=0..4$。

② $P(B_i)=\dfrac{C_4^{i}C_4^{4-i}}{C_8^{4}}$，依次 $\dfrac{1}{70},\dfrac{8}{35},\dfrac{18}{35},\dfrac{8}{35},\dfrac{1}{70}$。

③ 条件概率：甲 i 白则乙 $4-i$ 白，同色只有"白白"或"黑黑"。

④ 关键式子：$P(A|B_i)=\dfrac{i(4-i)}{8}$。

⑤ 全概率 $P(A)=\dfrac{8}{35}\cdot\dfrac{3}{8}+\dfrac{18}{35}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{35}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{7}$。

⑥ 贝叶斯：$P(B_2|A)=\dfrac{18/35\times1/2}{3/7}=\dfrac{3}{5}$，其余各 $\dfrac{1}{5}$。

答案 (1) $\boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$**；(2) 甲盒 2 白时最大，为** $\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

04 独立性

25 分钟

独立的定义只有一行，但"两两独立 ≠ 相互独立"是个大坑。

一句话：独立 = **知道一个发不发生，不影响另一个**；写成式子就是 $P(AB)=P(A)P(B)$。

先讲清楚

一、定义与等价说法

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

等价地：$P(A|B)=P(A)$（只要 $P(B)>0$）。**三种独立也互相推导**：A 与 B 独立 ⇒ A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都独立。

二、三个事件相互独立

要**同时**满足四个等式：

$P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

前三个叫"两两独立"，加上第四个才是"相互独立"。**考试爱在这里挖坑。**

三、独立性的用处

独立最大的好处是：**联合概率直接乘**。所以"至少一个发生"这类题，独立时用对立事件最快：

$$P(\text{至少一个})=1-\Pi(1-P(A_i))$$

停一下：三个独立元件，可靠度都是 0.9，串联（都要工作）和并联（一个就行）的可靠度各是多少?

串联：$0.9^3=0.729$。

并联：$1-(1-0.9)^3=1-0.001=0.999$。

并联比串联可靠得多，这就是冗余设计的道理。

必背 · 三条

$P(AB)=P(A)P(B)$	独立
至少一个 $=1-\Pi(1-P_i)$	独立时
相互独立 ⇒ 两两独立	反之不成立

⚠ **两个坑：① 互斥 ≠ 独立**（$P>0$ 时互斥必不独立）；② 三事件只验了两两独立就去用 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。

自测 · 2 道

1. $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，独立。求 $P(A\cup B)$。
2. 互斥的两个事件，可能独立吗?

1. $0.5+0.4-0.2=0.7$。

2. 只要两者概率都大于 0，就**不可能**独立。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 填1 3 分　○ 会　○ 卡　○ 不会

设事件 A、B 相互独立，且 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，则 $P(A-B)=$ ____。

一句话：这道题就是先用独立算出 $P(AB)$，再套差事件公式。

① 独立给出 $P(AB)=P(A)P(B)=0.5\times0.6=0.3$。

② 差事件 $A-B=A\overline{B}$，故 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$。

关键式子：$P(A-B)=0.5-0.3=0.2$ ③ **注意：不是 $P(A)-P(B)$，减掉的必须是交的概率。**

④ 得出：**答案 0.2**

05 随机变量与分布函数

35 分钟 · 全书的枢纽

这一讲之后，"事件"变成了"数"，才能求导、积分。

一句话：随机变量就是**把每个结果编一个号**；分布函数 $F(x)=P(X\le x)$ 是**累积到 x 为止的概率**。

? $P(X\le x)$ 和 $P(X=x)$ 有什么区别?
连续型时后者恒为 0，前者才是有用的那个。**所以分布函数是主角，密度是配角。**

先讲清楚

一、分布函数的三条性质

$F(x)=P(X\le x)$，满足：

1. **单调不减**：x 变大，累积得更多；
2. **两端**：$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$；
3. **右连续**：$F(x+0)=F(x)$。

这三条是充要条件，选择题常考"下面哪个能当分布函数"。

二、用分布函数算概率

要求	式子
$P(a<X\le b)$	$F(b)-F(a)$
$P(X>b)$	$1-F(b)$
$P(X=b)$（跳跃高度）	$F(b)-F(b-0)$

离散型的 F 是阶梯函数，跳跃高度就是那一点的概率。这是填空题高频。

三、离散型与连续型的对照

	离散型	连续型
描述	分布律 $P(X=x_k)=p_k$	密度 $f(x)\ge 0$
归一	$\Sigma\, p_k=1$	$\int f(x)dx=1$
F 与它	$F(x)=\Sigma_{x_k\le x}p_k$	$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$
单点概率	p_k 可能 >0	**恒为 0**

连续型的关键：$f(x)$ 是密度不是概率，可以大于 1。

必背 · 四条

$F(x)=P(X\le x)$	单调、右连续、两端 0/1
$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$	最常用
$\int f=1$，$F'=f$	连续型
跳跃高度 = 该点概率	离散型

2025 · 选择 2 真题 跳跃点

$F(x)=0$ $(x<0)$；$F(x)=\frac{1}{2}$ $(0\le x<1)$；$F(x)=1-\frac{1}{4x}$ $(x\ge 1)$。求 $P(X=1)$。

单点概率 = 跳跃高度：

$P(X=1)=F(1)-F(1-0)$

$F(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$F(1-0)=\frac{1}{2}$

所以 $P(X=1)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，选 **C**。

⚠ **两个坑：** ① 连续型 $P(X=a)$ 是 0，别去算；② $P(a<X\le b)$ 和 $P(a\le X\le b)$ 在离散型时差别很大。

自测 · 2 道

1. $F(x)$ 在 $x=2$ 处从 0.3 跳到 0.7，$P(X=2)$ 是多少？
2. 连续型随机变量 $P(X=3)$ 等于多少？

1. 0.4。

2. 0。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 选2 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

设随机变量 X 的分布函数为：$x<0$ 时 $F(x)=0$；$0\le x<1$ 时 $F(x)=\frac{1}{2}$；$x\ge 1$ 时 $F(x)=1-\frac{1}{4x}$。则 $P(X=1)=$（ ）。

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

一句话：这道题就是求单点概率：右极限减左极限。

① 单点公式：$P(X=a)=F(a)-F(a-0)$。

② 右值 $F(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，左极限 $F(1-0)=\frac{1}{2}$。

关键式子：$P(X=1)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ ③ **注意：F 在 1 处有跳跃，说明 X 不是连续型。**

④ 得出：**答案 C**

2024 卷 · 真题 1 道

2024 · 选2 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

F_1,F_2 为分布函数，f_1f_2 为密度，则下列能作为概率密度的是____。

A. $af_1+(1-a)f_2$ B. $[F_1f_1+F_2f_2]/2$ C. $\sqrt{f_1f_2}$ D. $[f_1+f_2]/2$

一句话：密度必须"非负 + 积分为 1"两条都满足。

① A 要 $0\le a\le 1$ 才行，题中 a 任意，排除。

② B 的积分只有 $\frac{1}{2}$；C 的积分一般小于 1。

③ 关键式子：$\int\frac{f_1+f_2}{2}dx=\frac{1+1}{2}=1$，且恒非负。

答案 D

2023 卷 · 真题 1 道

2023 · 选2 3 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

设 F_1,F_2 分别为 X_1,X_2 的分布函数，为使 $F=aF_1-bF_2$ 是分布函数，应取 ____。

A. $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$

B. $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$

C. $a=-\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

D. $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

一句话：用分布函数的两条硬条件筛系数。

① 必须单调不减，且 $F(+\infty)=1$、$F(-\infty)=0$。

② 由 $a-b=1$ 排除 B（差为 0）与 D（差为 2）。

③ C 中 $a<0$，F 会递减，排除。

④ A：$a-b=1$ 且 $a>0$、$-b>0$。

答案 A

06

常见离散分布

30 分钟

四个分布，认准"什么时候用"比记公式更重要。

一句话： 二项 = **n 次独立试验数成功次数**；泊松 = **单位时间来的次数**；几何 = **第一次成功要等几次**。

先讲清楚

一、四个分布一览

分布	分布律	E	D
0-1 分布	$P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
二项 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

泊松 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
几何	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

二、怎么认

- **"n 次独立重复""每次概率相同"**→ 二项
- **"单位时间/面积内到达的次数"**→ 泊松
- **"第几次才首次成功"**→ 几何
- **"恰好是第 k 次成功"**（前面已有 k-1 次成功）→ 负二项，考试里常写成 $C_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$

三、泊松的加法性

独立的两个泊松变量相加仍是泊松：$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)\Rightarrow X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

反过来也有用：总次数 $Y\sim P(\lambda\, t_2)$ 减去前段 $X\sim P(\lambda\, t_1)$，剩下的 $Y-X\sim P(\lambda(t_2-t_1))$，而且**与前段独立**。

停一下：某路口每分钟平均来 3 辆车，求一分钟内没车来的概率。

$X\sim P(3)$，$P(X=0)=e^{-3}\approx 0.0498$。

必背 · 四条

$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	二项
$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	泊松，$E=D=\lambda$
$(1-p)^{k-1}p$	几何，$E=1/p$
泊松可加	λ 相加

自测 · 2 道

1. 射击命中率 0.8，独立射 5 次，恰好中 3 次的概率?
2. 泊松分布 $P(2)$ 的期望和方差分别是多少?

1. $C_5^3(0.8)^3(0.2)^2=0.2048$。

2. 都是 2。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 填2　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

某人向同一目标独立重复射击，每次命中概率为 $0<p<1$，则第 5 次射击恰好是第 3 次命中的概率为____。

一句话：这道题就是负二项：最后一次锁死命中，前四次凑够两次。

① 第 5 次必须命中，概率 p，位置固定不参与排列。

② 前 4 次恰好命中 2 次，概率 $C_4^2\,p^2\,(1-p)^2$。

关键式子：$P=C_4^2\,p^2\,(1-p)^2\cdot p=6p^3(1-p)^2$ ③ **注意：写成 C_5^3 就错了，第 5 次的角色不是随便排的。**

④ 得出：**答案 $6p^3(1-p)^2$**

2023 卷 · 真题 1 道

2023 · 填4　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

$X\sim B(n,p)$，$EX=2.4$，$DX=1.44$，求 $P\{X<1\}$。

一句话：先由均值方差反解 n 和 p。

① $np=2.4$，$np(1-p)=1.44$。

② 相除得 $1-p=0.6\Rightarrow p=0.4$，$n=6$。

③ $P\{X<1\}=P\{X=0\}=0.6^6$。

④ $0.6^6\approx0.0467$。

答案 $0.6^6\approx0.0467$

07 常见连续分布

35 分钟 · 正态是重点

三个分布：均匀、指数、正态。正态占一半分值。

一句话：正态的题，**第一步永远是标准化** $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，然后查 Φ。

先讲清楚

一、三个分布的密度

分布	密度	E	D
均匀 $U(a,b)$	$f=\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数 $E(\lambda)$	$f=\lambda e^{-\lambda x}\ (x>0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态 $N(\mu,\sigma^2)$	$f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

二、正态的三个必用结论

① 标准化：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

② 对称性：$\Phi(-z)=1-\Phi(z)$

③ 区间概率：$P(|X-\mu|<\sigma)=0.6826$，2σ 是 0.9544，3σ 是 0.9974

三、指数分布的"无记忆性"

$$P(X>s+t|\ X>s)=P(X>t)$$

意思是：**已经等了 s 小时，再等 t 小时的概率，和从头等 t 小时一样。**（像"新的一样"）

这条常考判断题，**只有指数分布有这个性质。**

停一下：$X\sim N(1,4)$，求 $P(1<X<3)$。

$\sigma=2$，标准化：$z_1=0$，$z_2=1$。

$P=\Phi(1)-\Phi(0)=0.8413-0.5=0.3413$。

必背 · 四条

$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$	标准化
$\Phi(-z)=1-\Phi(z)$	对称性
指数 $E=1/\lambda$，$D=1/\lambda^2$	无记忆性
均匀 $D=(b-a)^2/12$	别和正态混

⚠ **两个坑：** ① 正态题目里 σ 和 σ^2 搞混（$N(1,4)$ 的 $\sigma=2$）；② 指数分布里 λ 和均值 $1/\lambda$ 搞混。

自测 · 2 道

1. $X\sim N(0,1)$，$P(X<1.96)$ 约多少？
2. $X\sim U(0,2)$，$E(X)$ 和 $D(X)$ 各是多少？

1. 0.975。

2. $E=1$，$D=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$。

2023 卷 · 真题 1 道

2023 · 填2　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

$X\sim N(2,3)$，则 $Y=5-2X$ 的分布函数为 ____。

一句话：正态的线性变换仍是正态。

① $aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$。

② 这里 $\mu=2,\sigma^2=3,a=-2,b=5$。

③ $EY=1$，$DY=4\times3=12$，即 $Y\sim N(1,12)$。

④ 故 $F_Y(y)=\Phi(\frac{y-1}{2\sqrt{3}})$。

答案 $F_Y(y)=\Phi(\frac{y-1}{2\sqrt{3}})$

2022 卷 · 真题 1 道

2022 · 选2 3 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

X,Y,Z 独立，$X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(2,3)$，$Z\sim N(3,5)$，$p_1=P(X<Y)$，$p_2=P(Y<Z)$，则（ ）。

(A) $p_1>p_2$ (B) $p_1<p_2$ (C) $p_1=p_2$ (D) 不能确定

一句话：比 $X<Y$ 就是比 $X-Y<0$，化成标准正态。

① 独立正态的差仍正态：$X-Y\sim N(-1,5)$。

② 同理 $Y-Z\sim N(-1,6)$。

③ 两者均值都是 -1，**方差小的更集中、落在 0 左侧的概率更大。**

④ 关键式子：$p_1=\Phi(1/\sqrt{5})$，$p_2=\Phi(1/\sqrt{6})$。

答案 A

08 二维随机变量与联合分布

35 分钟 · 解答题必考一道

从"一个数"变成"一对数"，套路完全一样，只是多积一层。

一句话：联合分布描述**一对**随机变量。离散型用**表格**，连续型用**二元密度**，所有概率都是"在区域上求和/积分"。

? 二维密度里那个常数 A 怎么定?
和一元一样：**整个平面上的积分必须等于 1**。只是现在要积两重。

先讲清楚

一、联合分布函数

$$F(x,y)=P(X\le x,\ Y\le y)$$

它的含义是"点落在左下角矩形里"的概率。**考试很少直接考它，主要用密度。**

二、离散型：一张表

把 X 的取值放行、Y 的取值放列，每个格子填 $P(X=x_i,Y=y_j)$。**全表加起来必须等于 1。**

三、连续型：两重积分

要求	做法
定常数	$\iint f\,dx\,dy=1$
区域概率	$P((X,Y)\in D)=\iint_D f\,dx\,dy$
落在 x 的范围	先把 y 积掉

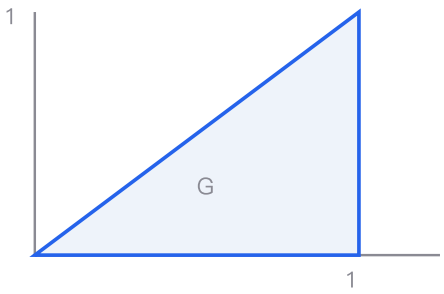
关键动作：画出区域 D，再定积分上下限。不画图几乎必错。

四、均匀分布

若 (X,Y) 在区域 G 上均匀，则

$$f=\frac{1}{S_G}\ (G\text{ 内}),\text{外面为 }0$$

面积一变，密度就变。这是定常数的捷径。



三角形 G：面积 $\frac{1}{2}$，密度 2 定常数：先算面积 求概率：在 D 上积分 画图定上下限，一步都不能省

图 2：二维题先画区域，再写积分限。

停一下：$f(x,y)=Ay\ (0<x<1,0<y<1)$，求 A。

$\int_0^1\int_0^1 Ay\,dx\,dy=A\int_0^1 y\,dy=\frac{A}{2}=1$

所以 $A=2$。

必背 · 三条

$\iint f\,dx\,dy=1$	定常数
$P((X,Y)\in D)=\iint_D f$	区域概率
均匀：$f=1/S_G$	面积决定密度

⚠ **两个坑：** ① 积分限写错（先画图）；② 忘了"外面为 0"，积分区间没限制。

自测 · 2 道

1. 均匀分布在面积 4 的区域上，密度是多少?
2. $f(x,y)=A$（$0<x<1,0<y<2$），求 A。

1. $1/4$。

2. 面积 2，$A=1/2$。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 解答2

○ 会　○ 卡　○ 不会

设随机变量 X, Y 只取值 1 和 -1，且 $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$，

$P(Y=1|X=1)=P(Y=-1|X=-1)=\frac{1}{3}$。

（1）求 X, Y 的联合分布律；（2）设 $U=\max(X,Y)$，求 U 与 X 的协方差。

一句话：这道题就是条件概率乘出联合表，再在联合表上算协方差。

① 逐格用 $P(X=x,Y=y)=P(Y=y|X=x)P(X=x)$ 乘 $\frac{1}{2}$。

② 得 $P(1,1)=P(-1,-1)=\frac{1}{6}$，$P(1,-1)=P(-1,1)=\frac{1}{3}$。

③ 由表得 U 的分布：$P(U=-1)=\frac{1}{6}$，$P(U=1)=\frac{5}{6}$。

④ $E(X)=0$，$E(U)=\frac{2}{3}$，还差 $E(XU)$。

关键式子：$E(XU)=1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ ⑤ 故 $\mathrm{cov}(X,U)=E(XU)-E(X)E(U)=\frac{1}{3}$。

⑥ **注意：$E(XU)$ 要用 X,U 的新联合表，不能照搬 X,Y 的表。**

⑦ 得出：**答案（1）$P(1,1)=P(-1,-1)=\frac{1}{6}$，其余两格 $\frac{1}{3}$；（2）$\mathrm{cov}(X,U)=\frac{1}{3}$**

2024 卷 · 真题 1 道

2024 · 解答4

○ 会　○ 卡　○ 不会

X,Y 独立同分布，$P(X=0)=0.2$，$P(X=1)=0.8$。$U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$。求 (1) 联合分布律；(2) 是否独立；(3) $t^2-Ut+V=0$ 有实根的概率。

一句话：U,V 只取 0/1，逐格算四个概率。

① $P(U=0,V=0)=0.2^2=0.04$；$P(U=1,V=1)=0.8^2=0.64$。

② $P(U=1,V=0)=2\times0.2\times0.8=0.32$；$P(U=0,V=1)=0$。

③ 独立检验：$P(U=0)P(V=0)=0.04\times0.36\neq0.04$ ⇒ **不独立**。

④ 有实根 Leftrightarrow $U^2-4V\geq0$，只有 (0,0) 和 (1,0) 满足。

⑤ 关键式子：$P=0.04+0.32=0.36$。

答案 (1) 0.04/0.32/0.64/0；(2) 不独立；(3) 0.36

2023 卷 · 真题 1 道

2023 · 解答2

○ 会　○ 卡　○ 不会

(X,Y) 的联合密度 $f=4$（$0\le x,y\le 0.5$），其余 0。求 (1) 相关系数 ρ_{XY}；(2) 是否独立。

一句话：正方形上均匀分布，既独立又不相关。

① 区域面积 $\frac{1}{4}$，密度 4 正好归一。

② $EX=EY=\frac{1}{4}$，$EX^2=\frac{1}{12}$，$DX=DY=\frac{1}{48}$。

③ $E(XY)=\frac{1}{16}=EX\cdot EY\Rightarrow \mathrm{Cov}=0$，$\rho=0$。

④ 边缘 $f_X=2$、$f_Y=2$，乘积等于 4。

⑤ 故独立。

答案 (1) $\rho=0$；(2) 相互独立

2022 卷 · 真题 1 道

2022 · 填3　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

$(X,Y)\sim N(0,0;1,1;0)$，则 $P(X<0,Y>0)=$____。

一句话：最后一个 0 是相关系数，正态下 $\rho=0$ 即独立。

① 均值都是 0，方差都是 1，$\rho=0$。

② 独立 ⇒ 概率可乘。

③ 关键式子：$P(X<0)P(Y>0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

答案 $\frac{1}{4}$

09 边缘分布、条件分布与独立性

35 分钟

从"一对"里揪出"一个"，就叫边缘分布。

一句话：边缘分布 = **把另一个变量求和/积掉**；独立 = **联合能拆成两个边缘的乘积**。

先讲清楚

一、边缘分布怎么求

	离散型	连续型
X 的边缘	按行求和 $p_i=\Sigma_j\, p_{ij}$	$f_X(x)=\int f(x,y)dy$
Y 的边缘	按列求和 $p_j=\Sigma_i\, p_{ij}$	$f_Y(y)=\int f(x,y)dx$

口诀：求谁就"不管谁"。求 X 的边缘，把 Y 积掉（或加掉）。

二、独立性

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \text{ 对所有 } (x,y) \text{ 成立}$$

离散型对应 $p_{ij}=p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$。**只要有一个格子不成立，就不独立。**

快速判断：若联合密度的定义域是"**矩形**"且能拆成 $g(x)h(y)$，一般独立；若定义域是**三角形/圆**这种 x,y 纠缠的，一定不独立。

三、条件分布

$$f_{X|Y}(x|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

离散型：$P(X=x_i|\,Y=y_j)=\dfrac{p_{ij}}{p_j}$。

就是条件概率公式在密度上的版本。

停一下：$f(x,y)=2$（$0<x<1, 0<y<1$），X 与 Y 独立吗?

$f_X=\int_0^1 2dy=2$（$0<x<1$），同理 $f_Y=2$。

$f_Xf_Y=4\neq 2$ —— **等等，这里密度其实是 1 才对**：2 的积分是 2，没有归一。

正确做法：先定常数。若题目给的是 $f=C$ 在单位正方形上，则 $C=1$，此时 $f=f_Xf_Y=1$，独立。

教训：先检查归一化，再谈独立。

必背 · 三条

$f_X(x)=\int f(x,y)dy$	边缘
$f=f_Xf_Y \Leftrightarrow$ 独立	对所有点成立
$f_{X\mid Y}=f/f_Y$	条件密度

⚠ **两个坑：** ① 边缘分布相同，联合分布不一定相同（相关结构可以不同）；② 定义域是三角形时，八成不独立。

自测 · 2 道

1. $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 还要满足什么才叫独立?
2. 定义域是 $0<x<y<1$，X,Y 独立吗?

1. 要对**所有** (x,y) 成立（不只是某一段）。

2. 不独立（定义域不是矩形）。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 解答3

○ 会　○ 卡　○ 不会

设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=Ay$（$0<x<1$，$0<y<1$），其它为 0。

（1）求常数 A；（2）判断 X, Y 的独立性；（3）计算 $Z=X+Y$ 的概率密度。

一句话：这道题就是归一化、求边缘、比乘积、再卷积，四步走。

① 归一化：$\int_0^1\int_0^1 Ay\,dxdy=\frac{A}{2}=1$，得 $A=2$。

② 边缘 $f_X(x)=\int_0^1 2y\,dy=1$（$0<x<1$），即 $X\sim U(0,1)$。

③ 边缘 $f_Y(y)=\int_0^1 2y\,dx=2y$（$0<y<1$）。

关键式子：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 处处成立，故 X, Y 独立。

④ 求 Z 的密度用 $f_Z(z)=\int f(z-y,y)dy$，按 z 的范围分段。

关键式子：$0<z<1$ 时 $\int_0^z 2y\,dy=z^2$；$1<z<2$ 时 $\int_{z-1}^1 2y\,dy=z(2-z)$ ⑤ 其它处为 0，两段在 $z=1$ 处同为 1，正好接上。

⑥ **注意：判独立要比"联合密度 = 边缘乘积"，不是看能否分离。**

⑦ 得出：**答案 $A=2$；独立；$f_Z(z)=z^2$（$0<z<1$），$z(2-z)$（$1<z<2$），其它 0**

2024 卷 · 真题 1 道

2024 · 解答3

○ 会　○ 卡　○ 不会

$f_X(x)=2x$ $(0<x<1)$，给定 $X=x$ 时 $Y\sim U(-x,x)$。求 (1) $f_{X|Y}(x|y)$；(2) $P(X>\frac{3}{4}\mid Y=\frac{1}{2})$。

一句话：先由 $f_{Y|X}f_X$ 得联合密度，再倒过来。

① 条件密度 $f_{Y|X}=\frac{1}{2x}$，$-x<y<x$。

② 联合：$f(x,y)=\frac{1}{2x}\cdot 2x=1$，区域 $|y|<x<1$。

③ 边缘：$f_Y(y)=\int_{|y|}^{1}1\,dx=1-|y|$。

④ 关键式子：$f_{X|Y}=\frac{1}{1-|y|}$，$|y|<x<1$。

⑤ 代入 $y=\frac{1}{2}$：密度为 2，区间 $(\frac{1}{2},1)$，概率 $\int_{3/4}^{1}2dx=\frac{1}{2}$。

答案 (1) $\frac{1}{1-|y|}$；(2) $\frac{1}{2}$

10 随机变量函数的分布

40 分钟 · 每年必考

已知 X 的分布，求 $Y=g(X)$ 或 $Z=X+Y$ 的分布。

一句话：万能方法是**分布函数法** —— 先写 $F_Y(y)=P(g(X)\le y)$，把事件翻译成 X 的范围，再求导。

? 求 $Y=X^2$ 的密度，能直接代 $y=x^2$ 吗?
不行。因为 $X^2\le y$ 对应 $-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}$，是**两段**，不是一段。**分布函数法会自动处理这个问题。**

先讲清楚

一、分布函数法（万能）

三步：

1. 写 $F_Y(y)=P(g(X)\le y)$；
2. 解不等式，把 y 的范围翻译成 x 的范围；
3. 对 y 求导得 $f_Y(y)$。

关键：单调时一段，不单调时可能两段。先把 y 的范围分好，再写积分。

二、$Z=X+Y$ 的卷积公式

当 X,Y 独立时：

$$f_Z(z)=\int f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

怎么用：把 $f_X(x)$ 和 $f_Y(z-x)$ 的定义域写成关于 x 的不等式，两条取交集 —— 交出来的范围就是积分限，而且**随 z 变**，所以要分段。

三、分段是常态

卷积题最后一定是**分段函数**。常见形态：

- Z 小时：交成一个小三角形 ⇒ 一段二次式；
- Z 中等：交成梯形 ⇒ 另一段；
- Z 大时：又变回小三角形。

验算：各段积分加起来必须等于 1。

> **停一下：**$X\sim U(0,1)$，$Y=X^2$，$y<0$ 时 $F_Y(y)$ 是多少？

$X^2\geq 0$ 恒成立，所以 $X^2\leq y<0$ 是不可能事件，$F_Y(y)=0$。

必背 · 三条

$F_Y(y)=P(g(X)\leq y)$	万能第一步
$f_Z=\int f_X(x)f_Y(z-x)dx$	独立时卷积
分段后各段积分和 = 1	验算

⚠ **两个坑：**① 不单调时只算了一段（漏掉另一半）；② 卷积积分限没有随 z 变，导致漏段。

自测 · 2 道

1. 求 $Y=X^2$ 的分布时，$y<0$ 段的 F_Y 是多少？
2. 卷积公式要求 X,Y 满足什么条件？

1. 0。

2. 相互独立。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 填3　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=2x$（$0<x<1$），其它为 0，则 $Y=2X-1$ 的概率密度 $f_Y(y)=$ ____。

一句话：这道题就是单调变换套公式 $f_Y(y)=f_X(x)|x'(y)|$。

① 由 $y=2x-1$ 反解 $x=\frac{y+1}{2}$，导数是 $\frac{1}{2}$。

② 区间跟着换：$0<x<1$ 对应 $-1<y<1$，其余取 0。

关键式子：$f_Y(y)=2\cdot\frac{y+1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{y+1}{2}$ ③ **注意：换元后要乘导数的绝对值，新区间也要重算。**

④ 得出：**答案 $f_Y(y)=\frac{y+1}{2}$（$-1<y<1$），其它为 0**

2024 卷 · 真题 1 道

2024 · 解答2

○ 会　○ 卡　○ 不会

$f(x,y)=\frac{1}{c}e^{-2cy}$（$0<x<2$，$y>0$），$c>0$。求 (1) c；(2) 是否独立；(3) $Z=X-3Y$ 的密度。

一句话：先定常数，再验 $f=f_Xf_Y$，最后卷积。

① 归一：$\int_0^2dx\int_0^\infty\frac{1}{c}e^{-2cy}dy=\frac{1}{c^2}=1\Rightarrow c=1$。

② 边缘：$f_X=\frac{1}{2}$，$f_Y=2e^{-2y}$，乘积正好是 f ⇒ **独立**。

③ 关键式子：$f_Z(z)=\int f_X(z+3y)f_Y(y)dy$。

④ 定义域 $0<z+3y<2$，$y>0$ 决定积分限。

⑤ 结果：$z<0$ 与 $0\le z<2$ 两段，$z\ge2$ 时为 0。

答案 $c=1$；独立；f_Z 分两段

2023 卷 · 真题 2 道

2023 · 解答3

○ 会　○ 卡　○ 不会

X 取 0、2 各 $\frac{1}{2}$，Y 的密度 $f_Y(y)=2y$ $(0<y<1)$，X,Y 独立。求 (1) $P(Y<EY)$；(2) $Z=X+Y$ 的密度。

一句话：先算 EY，再用全概率把混合型 Z 拆开。

① $EY=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}$。

② $P(Y<EY)=\int_0^{2/3}2ydy=\frac{4}{9}$。

③ $f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-2)$。

④ $0<z<1$ 时 $f_Z=z$；$2<z<3$ 时 $f_Z=z-2$；其余 0。

答案 (1) $\frac{4}{9}$；(2) $f_Z=z$ $(0<z<1)$，$z-2$ $(2<z<3)$

2023 · 解答4

○ 会　○ 卡　○ 不会

X 的密度 $f=Cx^2$ $(0<x<1)$，$Y=X^2$。求 (1) C；(2) $P(\frac{1}{2}<X<2)$；(3) $F_Y(y)$。

一句话：先归一化定 C，再用分布函数法求 Y。

① $\int_0^1 Cx^2dx=\frac{C}{3}=1\Rightarrow C=3$。

② $P(\frac{1}{2}<X<2)=\int_{1/2}^1 3x^2dx=\frac{7}{8}$。

③ $y<0$ 时 $F_Y=0$。

④ $0\le y<1$ 时 $F_Y=\int_0^{\sqrt{y}}3x^2dx=y^{3/2}$。

⑤ $y\ge1$ 时 $F_Y=1$。

答案 $C=3$；$\frac{7}{8}$；$F_Y=0$ $(y<0)$，$y^{3/2}$ $(0\le y<1)$，1 $(y\ge1)$

2022 卷 · 真题 4 道

2022 · 选3 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

X 服从指数分布，$Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数（ ）。

(A) 连续　(B) 至少两个间断点　(C) 阶梯函数　(D) 恰好一个间断点

一句话：$\min\{X,2\}$ 把连续段"截断"在 2，那里跳一下。

① $y<2$：$F_Y(y)=P(X\le y)=1-e^{-\lambda y}$，连续。

② $y\ge 2$：必有 $Y\le y$，$F_Y=1$。

③ 关键式子：$F_Y(2)-F_Y(2-)=P(X>2)=e^{-2\lambda}>0$。

④ 只有 $y=2$ 一个跳跃点。

答案 D

2022 · 填2 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

X 有严格单调连续分布函数 F，令 $Y=F(X)$，则 $EY^2=$____。

一句话：$F(X)$ 一定服从 $U(0,1)$，这是概率积分变换。

① $P(Y\le y)=P(X\le F^{-1}(y))=y$。

② 所以 $Y\sim U(0,1)$，密度为 1。

③ 关键式子：$EY^2=\int_0^1 y^2dy=\dfrac{1}{3}$。

答案 $\dfrac{1}{3}$

2022 · 解答2

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

$F(x)=\dfrac{ax}{1+x}+b$ $(x>0)$，$F(x)=0$ $(x\le 0)$。求 (1) a,b 与密度；(2) $Y=X^2$ 的密度；(3) $P(1\le X\le 2)$。

一句话：用 $F(+\infty)=1$ 和右连续定参数，再分布函数法求 Y。

① $a+b=1$（$x\to\infty$）；$F(0+)=b=0$（右连续）。

② 得 $a=1,b=0$；关键式子：$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$。

③ Y：$F_Y(y)=P(X\le\sqrt{y})=\dfrac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$ $(y\ge 0)$。

④ 求导 $f_Y(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$。

⑤ $P(1\le X\le 2)=F(2)-F(1)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$。

答案 $a=1,b=0$；f_Y 如上；$\dfrac{1}{6}$

2022 · 解答3

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

X 取 0、2 各 $\dfrac{1}{2}$，Y 的密度 $2y$ $(0<y<1)$，独立。(1) $P(Y\le EY)$；(2) $Z=X+Y$ 的密度。

一句话：先算 EY，Z 按 X 的两个取值加权。

① $EY=\int_0^1 2y^2dy=\dfrac{2}{3}$。

② $P(Y\le\dfrac{2}{3})=\int_0^{2/3}2ydy=\dfrac{4}{9}$。

③ 关键式子：$f_Z(z)=\dfrac{1}{2}f_Y(z)+\dfrac{1}{2}f_Y(z-2)$。

④ $0<z<1$ 时 $f_Z=z$；$2<z<3$ 时 $f_Z=z-2$；其余 0。

答案 (1) $\dfrac{4}{9}$；(2) 两段

11 数字特征：期望、方差、协方差

40 分钟 · 分值很大

不关心全貌，只关心"平均"和"散得多开"。

> **一句话：**期望是**加权平均**，方差是**偏离程度的平方平均**，协方差是**两个变量一起偏的程度**。

? $D(X+Y)=DX+DY$ 什么时候成立？
独立时一定成立；不独立时不成立，要加 2Cov。这是选择题的常客。

先讲清楚

一、定义与算法

	离散型	连续型
$E(X)$	$\Sigma\, x_k p_k$	$\int xf(x)dx$
$E(g(X))$	$\Sigma\, g(x_k)p_k$	$\int g(x)f(x)dx$
$D(X)$	$E(X^2)-[E(X)]^2$（最常用）	

算方差永远先用这个公式，比 $\Sigma(x-EX)^2p$ 快得多。

二、四条运算性质

① $E(aX+b)=aE(X)+b$（期望是线性的，**永远成立**）

② $D(aX+b)=a^2D(X)$（常数不影响方差）

③ 独立时 $E(XY)=E(X)E(Y)$，$D(X\pm Y)=DX+DY$

④ 一般情况：$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

三、协方差与相关系数

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\in[-1,1]$$

$\rho=0$ 叫**不相关**，只说明**没有线性关系**；**不代表独立**。

关系	成立吗
独立 ⇒ 不相关	**成立**
不相关 ⇒ 独立	**不成立**（除非二维正态）

停一下：$X\sim U(0,6)$，$Y\sim N(0,4)$，独立，求 $D(2X-3Y)$。

$DX=36/12=3$，$DY=4$。

$D(2X-3Y)=4\times3+9\times4=48$。

注意负号不影响方差，**系数要平方**。

必背 · 五条

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$	最常用
$E(aX+b)=aEX+b$	线性，永远成立
$D(aX+b)=a^2DX$	常数不贡献
$\text{Cov}=E(XY)-EX\cdot EY$	协方差
独立 ⇒ 不相关	反之不成立

⚠ **两个坑：** ① 忘记平方系数；② 把"不相关"当成"独立"。

自测 · 3 道

1. $DX=2$，求 $D(3X+1)$。
2. $\text{Cov}(X,Y)=0$ 说明什么？
3. 独立时 $D(X-Y)$ 等于多少？

1. $9\times2=18$。

2. X 与 Y 不相关（无线性关系）。

3. $DX+DY$。

2025 卷 · 真题 2 道

2025 · 填4 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(1,1;1,2;0)$，则 $E(X^2Y) =$ ____。

一句话：这道题就是 $\rho = 0$ 的二维正态必独立，把期望拆开算。

① 读参数：$\mu_1 = \mu_2 = 1$，$\sigma_1^2 = 1$，$\sigma_2^2 = 2$，$\rho = 0$。

② 二维正态里 $\rho = 0$ 等价于独立，故 $E(X^2Y) = E(X^2)E(Y)$。

关键式子：$E(X^2) = DX + (EX)^2 = 1 + 1 = 2$ ③ 再乘 $EY = 1$，得 $E(X^2Y) = 2$。

④ 得出：**答案 2**

2025 · 解答4

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $G = \{(x,y): |x| < y < 1\}$ 上服从均匀分布，求（1）DX；（2）$\mathrm{cov}(X,Y)$；（3）$\mathrm{cov}(|X|,|Y|)$。

一句话：这道题就是对称三角形上的均匀分布，用对称性省掉一半积分。

① 区域是等腰三角形，面积 $2\int_0^1(1-x)dx = 1$，故密度恒为 1。

② x 方向对称，$EX = 0$；$E(XY)$ 关于 x 是奇函数，也为 0。

③ $DX = E(X^2) = 2\int_0^1\int_0^y x^2\,dxdy = \frac{1}{6}$。

④ 于是 $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY = 0$。

⑤ $E(|X|) = \frac{1}{3}$，$E(|Y|) = EY = 2\int_0^1\int_0^y y\,dxdy = \frac{2}{3}$。

⑥ $E(|XY|) = 2\int_0^1\int_0^y xy\,dxdy = \frac{1}{4}$。

关键式子：$\mathrm{cov}(|X|,|Y|) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{36}$ ⑦ **注意：X, Y 不相关，$|X|, |Y|$ 却正相关，结论不能照搬。**

⑧ 得出：**答案（1）$\frac{1}{6}$；（2）0；（3）$\frac{1}{36}$**

2024 卷 · 真题 2 道

2024 · 选3 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

$Y\sim E(2)$，$X_1=1\,(Y>1)$ 否则 0，$X_2=1\,(Y>2)$ 否则 0，$Z=X_1X_2$，则 $DZ=$____。

A. e^{-2}　B. $e^{-2}(1-e^{-2})$　C. e^{-4}　D. $e^{-4}(1-e^{-4})$

一句话：把 Z 化成"$Y>2$ 的示性变量"，再套 0-1 方差。

① $X_1X_2=1$ 需要 $Y>1$ 且 $Y>2$，等价于 $Y>2$。

② 故 Z 是参数 $p=P(Y>2)$ 的 0-1 变量，$DZ=p(1-p)$。

③ 关键式子：$p=e^{-2\times2}=e^{-4}$。

④ 所以 $DZ=e^{-4}(1-e^{-4})$。

答案 D

2024 · 填3 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

$(0,t_1]$ 内粒子数 $X\sim P(\lambda t_1)$，$(0,t_2]$ 内 $Y\sim P(\lambda t_2)$，$t_1<t_2$，$Z=Y-X$。则 X 与 Z 的相关系数 $\rho=$____。

一句话：两段不相交时段，泊松增量独立 ⇒ 不相关。

① 泊松过程在 $(0,t_1]$ 与 $(t_1,t_2]$ 上的增量相互独立。

② 且 $Z\sim P(\lambda(t_2-t_1))$，与 X 独立。

③ 关键式子：$\rho=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{DX\cdot DZ}}=0$。

答案 $\rho=0$

2023 卷 · 真题 2 道

2023 · 选3 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

若 $DX>0, DY>0$，由 $D(X+Y)=DX+DY$ **不能**推出 ____。

A. $E(XY)=EX\cdot EY$

B. $D(X-Y)=DX+DY$

C. X 与 Y 不独立

D. X 与 Y 不相关

一句话：$D(X+Y)=DX+DY$ 等价于不相关。

① 展开得 $D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y)$。

② 故条件即 $\mathrm{Cov}=0$，即不相关（D 可推出）。

③ 不相关等价于 $E(XY)=EX\cdot EY$（A 可推出）。

④ 此时 $D(X-Y)=DX+DY$（B 可推出）。

⑤ 不相关推不出独立，所以选 C。

答案 C

2023 · 填3 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

X_1, X_2, X_3 相互独立，$X_1\sim U[0,6]$，$X_2\sim N(0,4)$，$X_3\sim P(5)$，$Y=X_1-2X_2+3X_3$。求 DY 和 $\rho(Y,X_2)$。

一句话：独立可加算方差，协方差算相关系数。

① $DX_1=\dfrac{36}{12}=3$，$DX_2=4$，$DX_3=5$。

② 关键式子：$DY=3+4\times4+9\times5=64$。

③ $\mathrm{Cov}(Y,X_2)=-2DX_2=-8$。

④ $\rho=\dfrac{-8}{8\times2}=-0.5$。

答案 $DY=64$；$\rho=-0.5$

2022 卷 · 真题 1 道

2022 · 解答4

○ 会　○ 卡　○ 不会

袋中 1 红 2 黑 3 白，无放回取两次。X,Y,Z 为红、黑、白个数。(1) $P(X=1|Z=0)$；(2) (X,Y) 的联合分布；(3) ρ_{XY}。

一句话：无放回，先数有序取法，再走期望方差协方差。

① $Z=0$ 时两次都取自 3 只非白球，共 $3\times2=6$ 种。

② 其中恰 1 红：$1\times2+2\times1=4$ 种 $\Rightarrow \frac{4}{6}=\frac{2}{3}$。

③ 联合：分母 $6\times5=30$，逐格数有序取法。

④ 边缘：$EX=\frac{1}{3}$，$DX=\frac{2}{9}$；$EY=\frac{2}{3}$，$DY=\frac{16}{45}$。

⑤ 关键式子：$E(XY)=\frac{2}{15}$，$\mathrm{Cov}=-\frac{4}{45}$。

⑥ $\rho=\frac{-4/45}{\sqrt{(2/9)(16/45)}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$。

答案 (1) $\frac{2}{3}$；(2) 联合表；(3) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

12 大数定律与中心极限定理

30 分钟

一句话概括这一讲：**样本一多，什么都变正态。**

一句话： 大数定律说"**平均值稳定**"；中心极限定理说"**平均值近似正态**"。

? 丢 10000 次硬币，正面比例几乎一定是 0.5 —— 为什么？
而且这个比例围绕 0.5 的**波动形状**，为什么总是钟形？

先讲清楚

一、切比雪夫不等式（工具）

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

它不需要知道分布，**只要知道期望和方差就能估概率**。考试常问"上界是多少"。

二、大数定律

切比雪夫大数定律：若 X_i 相互独立，$EX_i=\mu$，$DX_i\le C$（一致有界），则

$$P(|\frac{1}{n}\Sigma X_i-\mu|<\varepsilon)\to 1$$

伯努利大数定律：频率依概率收敛于概率。**这是"用频率估计概率"的依据。**

三、中心极限定理

设 X_i 独立同分布，$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$，则 n 大时

$$\frac{\Sigma X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\cdot\sim N(0,1)$$

标准化的三步：分子减期望、分母除标准差。

情形	标准化
和的标准化	$\frac{\Sigma X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$
均值的标准化	$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
二项近似	$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

停一下：$X\sim B(100,0.4)$，用正态近似求 $P(X\le 50)$ 的标准化形式。

$np=40$，$\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{24}$。

$P(X\le 50)\approx\Phi(\frac{50-40}{\sqrt{24}})=\Phi(2.04)$。

必背 · 三条

$P(\|X-EX\|\ge\varepsilon)\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$	切比雪夫
$\frac{\Sigma X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\to N(0,1)$	中心极限
$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	均值版

⚠ **两个坑：** ① 大数定律用的是"均值"，不是单个 X_n；② 二项近似别忘连续修正（题目一般不管，但要知道）。

自测 · 2 道

1. $\overline{X}$ 的标准差是多少?
2. 切比雪夫不等式需要知道分布吗?

1. $\sigma/\sqrt{n}$。

2. 不需要，只要期望和方差。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 选3　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

设随机变量序列 X_1, X_2, X_3 等相互独立，同服从参数为 2 的泊松分布，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。当 $n \to \infty$ 时，下列极限正确的是（ ）。

A. $P\left(\frac{\Sigma_{i=1}^{n}X_i - 2n}{2n} \le x\right) \to \Phi(x)$　B. $P\left(\frac{\Sigma_{i=1}^{n}X_i - 2n}{\sqrt{2n}} \le x\right) \to \Phi(x)$

C. $P\left(\frac{\Sigma_{i=1}^{n}X_i - 2n}{\sqrt{2n}} \le x\right) \to \Phi(x)$（原卷与 B 相同）　D. $P\left(\frac{\Sigma_{i=1}^{n}X_i - \sqrt{2n}}{\sqrt{2n}} \le x\right) \to \Phi(x)$

一句话：这道题就是中心极限定理，分母必须是 $\sqrt{nD(X)}$。

① 泊松(2) 有 $EX = 2$、$DX = 2$，n 项和的方差是 $2n$。

② 中心化后除以 $\sqrt{2n}$ 才收敛到 $N(0,1)$，除以 $2n$ 不行。

关键式子：$P\left(\frac{\Sigma_{i=1}^{n}X_i - 2n}{\sqrt{2n}} \le x\right) \to \Phi(x)$ ③ A 的分母错成 $2n$，D 的分子中心化错，只有 B 标准。

④ 得出：**答案 B**

2024 卷 · 真题 2 道

2024 · 选4 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

序列满足契比雪夫大数定律，$EX_1=\mu$，则正确的是____。

A. 各 X_i 期望方差都相同　B. 独立同分布　C. $\lim P(|\frac{1}{n}\Sigma X_i-\mu|<\varepsilon)=0$　D. X_n 依概率收敛于 μ

一句话：契比雪夫大数定律 = 独立 + 同期望 + 方差一致有界。

① 条件不要求同分布，B 排除。

② 结论是**样本均值**依概率收敛到 μ，极限应为 1，C 排除。

③ 收敛的是均值不是单个 X_n，D 排除。

④ 关键式子：$P(|\frac{1}{n}\Sigma X_i-\mu|<\varepsilon)\to 1$。

答案 A

2024 · 填2 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

$V\sim U(-2,2)$，独立测量 20 次，X 为电压大于 1 的次数，则 $P(X>10)\approx$____。

一句话：先算单次概率，再用正态近似。

① $P(V>1)=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$，故 $X\sim B(20,\frac{1}{4})$。

② $EX=5$，$DX=20\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$。

③ 关键式子：$P(X>10)\approx 1-\Phi(\frac{10-5}{\sqrt{15}/2})=1-\Phi(\frac{10}{\sqrt{15}})$。

④ 数值约 0.005，是极小概率。

答案 $1-\Phi(\frac{10}{\sqrt{15}})$

2022 卷 · 真题 1 道

2022 · 选4　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

X_i 独立同分布，$EX_i^k=\mu_k$，由切比雪夫不等式 $P(|\frac{1}{n}\Sigma X_i^2-\mu_2|\geq\varepsilon)\leq$（ ）。

(A) $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$　(B) $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$　(C) $\frac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$　(D) $\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

一句话：把 X_i^2 当成新的随机变量套切比雪夫。

① 令 $Y_i=X_i^2$，则 $EY_i=\mu_2$。

② 关键式子：$DY_i=EX^4-(EX^2)^2=\mu_4-\mu_2^2$。

③ 切比雪夫：$P(|\overline{Y}-EY|\geq\varepsilon)\leq\frac{DY}{n\varepsilon^2}$。

答案 A

---

13 数理统计基础：三大分布

35 分钟

从这一讲开始，主角从"随机变量"换成了"样本造出来的统计量"。

一句话：χ^2、t、F 三个分布，都是把正态样本拼起来造出来的，做题只需要认结构。

? $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 为什么是 $t(n-1)$ 而不是 $N(0,1)$?

因为分母里的 S 也是随机的，**多了一层不确定性，尾巴就变厚了。**

先讲清楚

一、三个分布的定义式（认结构用）

分布	构造	自由度
$\chi^2(n)$	n 个独立 $N(0,1)$ 的平方和	n
$t(n)$	$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$	n
$F(m,n)$	$\frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}$	(m,n)

上下都要除以各自的自由度，这是 F 和"两个卡方相除"的唯一区别。

二、正态总体的四个经典结论

设 X_i 来自 $N(\mu,\sigma^2)$：

① $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

③ $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

④ $\overline{X}$ 与 S^2 **相互独立**（正态特有）

第 ④ 条最容易被忽略，但它是 ② 和 ③ 能成立的前提。

三、两个总体的 F

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

用来做**方差比的检验和区间估计**。

> **停一下：** $Z\sim N(0,1)$，$U\sim\chi^2(5)$ 且独立，$\frac{Z}{\sqrt{U/5}}$ 服从什么？

按定义就是 $t(5)$。

必背 · 四条

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	方差
$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	均值，σ 未知
$\overline{X}\perp S^2$	正态特有
$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F$	方差比

⚠ **两个坑：** ① t 和 Z 的分界是"σ 知不知道"；② F 的自由度顺序不能反。

自测 · 2 道

1. σ 已知时，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 服从什么？
2. $F(3,5)$ 的分子自由度是多少？

1. $N(0,1)$。

2. 3。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 选5　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\frac{X_1 - X_3}{\sqrt{(X_2 + X_4)^2}}$ 服从（ ）。

A. $N(0,1)$　B. $\chi^2(1)$　C. $t(1)$　D. $F(1,1)$

一句话：这道题就是把统计量凑成 t 分布的定义式。

① 分子 $X_1 - X_3 \sim N(0, 2\sigma^2)$，与 $X_2 + X_4$ 独立。

② 两式同除 $\sqrt{2}\sigma$：分子成 $N(0,1)$，分母成 $\chi^2(1)$ 的开方。

关键式子：$\frac{X_1 - X_3}{|X_2 + X_4|} = \frac{U}{\sqrt{\chi^2(1)/1}} \sim t(1)$ ③ **注意：开方后是 $|X_2 + X_4|$，带绝对值仍服从 $t(1)$。**

④ 得出：**答案 C**

2024 卷 · 真题 1 道

2024 · 填4　3 分　○ 会　○ 卡　○ 不会

$X\sim N(0,\sigma^2)$，$\overline{X}$ 与 S^2 为样本均值与样本方差。$a=$____、$b=$____ 时 $a\overline{X}^2+bS^2\sim\chi^2$，自由度 ____。

一句话：两块分别配成 $\chi^2(1)$ 和 $\chi^2(n-1)$，自由度相加。

① $\overline{X}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})\Rightarrow\frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$。

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且与 $\overline{X}$ 独立。

③ 关键式子：$a=\frac{n}{\sigma^2}$，$b=\frac{n-1}{\sigma^2}$。

④ 自由度 $1+(n-1)=n$。

答案 $a=\frac{n}{\sigma^2}$，$b=\frac{n-1}{\sigma^2}$，自由度 n

2022 卷 · 真题 2 道

2022 · 选5　3 分　○ 会　○ 卡　○ 不会

$X\sim t(n)$，$Y=\frac{1}{X^2}\sim$（ ）。

(A) $\chi^2(n)$　(B) $\chi^2(n-1)$　(C) $F(n,1)$　(D) $F(1,n)$

一句话：把 t 拆成 $N/\sqrt{\chi^2/n}$，再取倒数平方。

① 记 $X=\frac{Z}{\sqrt{U/n}}$，$Z\sim N(0,1)$，$U\sim\chi^2(n)$。

② 关键式子：$\frac{1}{X^2}=\frac{U/n}{Z^2/1}$，而 $Z^2\sim\chi^2(1)$。

③ 两个卡方各除自由度再相除，就是 $F(n,1)$。

答案 C

2022 · 填4 3 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_{2n}$ 为样本，$\overline{X}$ 是全部 $2n$ 个的均值，$Y=\Sigma_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$，则 $EY=$____。

一句话：令 $W_i=X_i+X_{n+i}$，括号就是组内离差。

① $W_i\sim N(2\mu,2\sigma^2)$ 相互独立。

② $\frac{1}{n}\Sigma W_i=2\overline{X}$，故 $Y=(n-1)S_W^2$。

③ 关键式子：$Y/(2\sigma^2)\sim\chi^2(n-1)$，期望 $n-1$。

④ 所以 $EY=2(n-1)\sigma^2$。

答案 $2(n-1)\sigma^2$

14 # 参数估计：矩估计与极大似然

40 分钟 · 必考一道解答

用数据猜参数。两种猜法，各有固定流程。

一句话：矩估计 = **让样本矩等于理论矩**；极大似然 = **让已发生的事概率最大**。

? 抛 10 次硬币出现 7 次正面，猜正面概率 p。

为什么猜 0.7? 因为 $p=0.7$ 时"出现 7 次正面"这件事最可能发生 —— 这就是极大似然。

先讲清楚

一、矩估计（三步）

1. 写出理论矩：EX（一个参数时够用）；
2. 令它等于样本矩 $\overline{X}$；
3. 解出参数。

两个参数就要用 $EX=\overline{X}$ 和 $EX^2=A_2$ 联立。

二、极大似然（四步）

1. 写似然函数 $L(\theta)=\Pi f(x_i;\theta)$（离散用概率，连续用密度）；
2. 取对数 $\ln L$；
3. 对参数求导，令为 0；
4. 解出 $\hat{\theta}$。

为什么取对数？因为把乘积变成加法，求导方便，且不改变极值点。

三、估计量的评价

标准	含义
无偏	$E(\hat{\theta})=\theta$
有效	无偏里方差最小的
相合	$n\to\infty$ 时依概率收敛到真值

常见结论：$E(\overline{X})=\mu$（无偏）；$E(S^2)=\sigma^2$（无偏）；**S 不是 σ 的无偏估计。**

停一下：$X\sim B(1,p)$，样本 $x_1,\dots,x_n$，p 的极大似然估计是什么？

$L=p^{\Sigma x_i}(1-p)^{n-\Sigma x_i}$，取对数求导得 $\hat{p}=\dfrac{\Sigma x_i}{n}=\overline{X}$。

矩估计也是 $\overline{X}$。**很多题两种方法结果相同。**

必背 · 四条

矩估计：$EX=\overline{X}$	两参数再加 $EX^2=A_2$
$L=\Pi f(x_i)$，取对数求导	极大似然
$E(S^2)=\sigma^2$	但 $E(S)\neq\sigma$
无偏 + 方差最小 = 有效	评价标准

⚠ **三个坑：**① 似然写成"概率相加"（应该是相乘）；② 忘了取对数直接求导；③ 两参数只列一个方程。

自测 · 2 道

1. $X\sim P(\lambda)$，λ 的矩估计是什么?
2. 似然函数是概率的乘积还是和?

1. $\hat{\lambda}=\overline{X}$（因为 $EX=\lambda$）。

2. 乘积。

2025 卷 · 真题 2 道

2025 · 选4　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

设总体 X 的期望 μ 落在 $(-1, 1)$ 内，方差 $\sigma^2 > 0$，X_1, X_2, X_3 是来自 X 的简单随机样本，则 μ 的下列估计量中最有效的无偏估计量是（ ）。

A. X_1　B. $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$

C. $\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3$　D. $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

一句话：这道题就是两步筛：先看无偏，再比方差谁更小。

① 无偏要求系数和为 1，C 的系数和是 $\frac{3}{4}$，先淘汰。

② 独立同分布下方差为 $(\Sigma c_i^2)\sigma^2$，只比 Σc_i^2。

关键式子：A、B、D 的 Σc_i^2 依次为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ③ D 的方差 $DX/3$ 最小，所以 D 最有效。

④ 得出：**答案 D**

2025 · 解答5

○ 会　○ 卡　○ 不会

设总体 X 的分布律为 $P(X=-1)=\frac{\lambda}{\lambda+\theta+1}$，$P(X=0)=\frac{\theta}{\lambda+\theta+1}$，$P(X=1)=\frac{1}{\lambda+\theta+1}$，其中 λ,θ 未知。已取得容量 5 的样本值 (1,0,-1,0,1)，求 λ 和 θ 的矩估计值与最大似然估计值。

一句话：这道题就是同一组样本走两条路：比矩、比似然。

① 样本矩：$\bar{x}=\frac{1+0-1+0+1}{5}=\frac{1}{5}$，$A_2=\frac{3}{5}$。

② 总体矩：$\mu_1=EX=\frac{1-\lambda}{\lambda+\theta+1}$，$\mu_2=EX^2=\frac{1+\lambda}{\lambda+\theta+1}$。

③ 令 $\mu_1=\bar{x}$、$\mu_2=A_2$，两式相除得 $\frac{1+\lambda}{1-\lambda}=3$。

关键式子：解得 $\lambda=0.5$，回代得 $\theta=1$（矩估计值） ④ 似然：样本中 -1, 0, 1 各出现 1, 2, 2 次，$L=\frac{\lambda\theta^2}{(\lambda+\theta+1)^5}$。

⑤ 取对数后对两参数求偏导并令其为 0。

关键式子：$\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\theta}=\frac{5}{\lambda+\theta+1}$，解得 $\lambda=0.5$，$\theta=1$ ⑥ **注意：分母 $(\lambda+\theta+1)^5$ 来自归一化，求导时别漏。**

⑦ 得出：**答案 $\lambda=0.5$，$\theta=1$（两种方法结果相同）**

2024 卷 · 真题 1 道

2024 · 解答5

○ 会　○ 卡　○ 不会

$P(X=-1)=1-2\alpha$，$P(X=0)=3\beta$，$P(X=1)=\alpha-2\beta$，$P(X=2)=\alpha-\beta$，样本 (-1,0,1,0,-1,2,0,2)。求 α,β 的矩估计与极大似然估计。

一句话：两参数用一阶二阶矩联立，MLE 取对数求偏导。

① $EX=5\alpha-4\beta-1$，$EX^2=3\alpha-6\beta+1$。

② 样本：$\bar{x}=\frac{3}{8}$，$a_2=\frac{11}{8}$。

③ 解方程组得 $\alpha=\frac{3}{8}$，$\beta=\frac{1}{8}$（矩估计）。

④ 似然 $L=(1-2\alpha)^2(3\beta)^3(\alpha-2\beta)(\alpha-\beta)^2$。

⑤ 取对数求偏导令零，舍去不满足约束的根。

⑥ 得 $\alpha=3\beta=\frac{3}{8}$，$\beta=\frac{1}{8}$。

答案 两种估计都是 $\boldsymbol{\alpha=\frac{3}{8}}$，$\boldsymbol{\beta=\frac{1}{8}}$

2023 卷 · 真题 2 道

2023 · 选4　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$S^2=\frac{1}{n-1}\Sigma(X_i-\bar{X})^2$。下列**不正确**的是 ____。

A. μ 的矩估计和极大似然估计都是 $\bar{X}$

B. S 是 σ 的无偏估计

C. S^2 是 σ^2 的相合估计

D. $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计

一句话：无偏的是 S^2，不是 S。

① $E\bar{X}=\mu$，D 正确；两种估计都解出 $\bar{X}$，A 正确。

② 关键：$E(S^2)=\sigma^2$，但 $E(S)\neq\sigma$。

③ 开方不保持无偏性，B 错。

④ S^2 依概率收敛于 σ^2，C 正确。

答案 B

2023 · 解答5

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

$P(X=1)=\theta^2$，$P(X=2)=2\theta(1-\theta)$，$P(X=3)=(1-\theta)^2$，样本 1,2,1。(1) 求 θ 的极大似然估计；(2) 求矩估计量。

一句话：似然相乘求导，矩估计用一阶矩反解。

① $L=2\theta^5(1-\theta)$，$\ln L=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$。

② 求导为零：$\frac{5}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0 \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{5}{6}$。

③ $EX=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta$。

④ 令等于 $\overline{X} \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{2}$。

答案 (1) $\frac{5}{6}$；(2) $\frac{3-\overline{X}}{2}$

2022 卷 · 真题 1 道

2022 · 解答5

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

$X_1,\ldots,X_n$ 来自 $N(\mu_0,\sigma^2)$，μ_0 已知、σ^2 未知，T 为 σ^2 的极大似然估计。(1) 求 T；(2) 是否无偏；(3) 是否相合。

一句话：正态似然对 σ^2 求导得 T，再验证无偏与相合。

① $\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(X_i-\mu_0)^2$。

② 求导令零：$-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\Sigma(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma^4}=0$。

③ 关键式子：$T=\frac{1}{n}\Sigma(X_i-\mu_0)^2$。

④ $ET=\frac{1}{n}\cdot n\sigma^2=\sigma^2 \Rightarrow$ 无偏。

⑤ 由大数定律 $T\to\sigma^2 \Rightarrow$ 相合。

答案 $T=\frac{1}{n}\Sigma(X_i-\mu_0)^2$；无偏；相合

15 区间估计

30 分钟

不给一个点，给一个范围，再说明"有多大把握"。

一句话： 区间 = **点估计 ± 误差**，误差 = **分位点 × 标准误**。

? 为什么 95% 置信区间的分位点用 $z_{0.025}$ 而不是 $z_{0.05}$？
因为**两边各留 2.5%**，中间才是 95%。

先讲清楚

一、四种情形，一张表

情形	区间
σ 已知，估 μ	$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
σ 未知，估 μ	$\overline{X} \pm t_{\alpha/2}(n\text{-}1)\frac{S}{\sqrt{n}}$
估 σ^2	$\left(\frac{(n\text{-}1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n\text{-}1)S^2}{\chi^2_{1\text{-}\alpha/2}}\right)$
两总体方差比	用 F 分布

记忆主线： 知道 σ 用 z，不知道用 t；双侧都用 $\alpha/2$。

二、置信区间的性质

- 置信度越高，区间**越宽**（把握大代价是精度低）；
- 样本量越大，区间**越窄**（$\sqrt{n}$ 在分母）；
- 区间关于点估计**对称**（双侧时）。

停一下： 样本均值 20，$n=16$，$S=1$，求 μ 的 90% 区间。

σ 未知 ⇒ 用 $t(15)$，双侧 90% 用 $t_{0.05}(15)=1.753$。

误差 $=\frac{1}{4}\times 1.753 \approx 0.44$，区间 $(19.56, 20.44)$。

必背 · 三条

$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	σ 已知
$\overline{X} \pm t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$	σ 未知
双侧永远用 $\alpha/2$	别用 α

⚠ **两个坑：** ① 双侧用了 α 而不是 $\alpha/2$；② σ 未知还硬用 z。

自测 · 2 道

1. 置信度从 90% 提到 99%，区间变宽还是变窄?
2. n 从 16 增到 64，误差变成原来的几分之几?

1. 变宽。

2. $1/2$（因为 $\sqrt{n}$ 翻倍）。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 填5　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，参数均未知。抽取 8 个样品，样本均值为 15，样本方差为 2，则 μ 的置信水平 90% 的双侧置信区间是 ____。

一句话：这道题就是 σ 未知的小样本，用 t 分布造区间。

① σ 未知用 t，自由度 $n - 1 = 7$，标准差取 $s = \sqrt{2}$。

② 90% 双侧意味着 $\alpha = 0.1$，分位点写 $t_{0.05}(7)$。

关键式子：半宽 $t_{0.05}(7)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}t_{0.05}(7)$ ③ **注意：不能写 z 分位点，自由度是 7 不是 8。**

④ 得出：**答案 $\left(15 - \frac{1}{2}t_{0.05}(7),\ 15 + \frac{1}{2}t_{0.05}(7)\right)$**

2024 卷 · 真题 1 道

2024 · 选5 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，独立且**方差已知**，样本量 n_1,n_2。则 μ_1-μ_2 的 1-α 双侧置信区间为____。

A. $\overline{X}$-$\overline{Y}\pm z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$　B. $\overline{X}$-$\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$　C. 用 t_α S_W 的式子　D. 用 $t_{\alpha/2}S_W$ 的式子

一句话：方差已知用 Z，双侧用 $\alpha/2$。

① 枢轴量 $Z=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$。

② 关键式子：双侧区间用 $z_{\alpha/2}$。

③ C、D 用 t 和 S_W，那是方差未知的场合。

答案 B

2023 卷 · 真题 1 道

2023 · 填5 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

正态总体抽 n=16，样本均值 20，样本标准差 1，求 μ 的 90% 置信区间。

一句话：σ 未知、小样本，用 t 分布。

① 枢轴量 $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，自由度 15。

② 双侧 90% ⇒ 用 $t_{0.05}(15)=1.7531$。

③ 误差 $\Delta=\frac{1}{4}\times1.7531\approx0.4383$。

④ 区间 20 ± 0.4383。

答案 (19.56,20.44)

2022 卷 · 真题 1 道

2022 · 填5　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

样本均值 $\bar{x}=9.5$，μ 的 0.95 双侧置信区间上限为 10.8，则该区间为____。

一句话：双侧区间关于 $\bar{x}$ 对称，由上限反推下限。

① 半长 $\Delta=10.8-9.5=1.3$。

② 下限 $=9.5-1.3=8.2$。

③ 关键式子：区间 $(8.2,10.8)$。

答案 $(8.2,10.8)$

16 假设检验

40 分钟 · 最后一道大题

先假设，再看数据打不打脸。

一句话：把"要证明的"放在**备择假设**里，再用统计量看它落不落在**拒绝域**。

? 为什么"认为 $\mu>10$"要写成 $H_1:\mu>10$ 而不是 H_0?
因为检验的逻辑是"**假设 H_0 成立，看数据是否极端**"，所以**想证明的放备择**。

先讲清楚

一、五个步骤（固定流程）

1. 写 H_0 与 H_1；
2. 选统计量（看 σ 知不知道、单双侧）；
3. 写出拒绝域；
4. 代数据算统计量；
5. 下结论（拒绝/接受）。

二、统计量怎么选

情形	统计量
σ 已知，检验 μ	$z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

σ 未知，检验 μ	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$
两均值差，方差已知	$z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$
检验 σ^2	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

方向判断：H_1 是 > 用右侧，< 用左侧，≠ 用双侧（分位点取 $\alpha/2$）。

三、两类错误

	真实情况 H_0 成立	H_0 不成立
拒绝 H_0	**第一类错误**（概率 α）	正确
接受 H_0	正确	**第二类错误**（概率 β）

α 是我们能控制的"冤枉好人"的概率。

停一下：α=0.05 下接受了 H_0，换成 α=0.01 会怎样?

α 变小 ⇒ 拒绝域变小 ⇒ **更难拒绝**。

原来接受，现在更会接受。**反之不成立**（原来拒绝，α 变大才更可能拒绝）。

必背 · 四条

想证明的放 H_1	核心原则
σ 已知 z，未知 t	选统计量
双侧用 $\alpha/2$	单侧用 α
α 是第一类错误概率	冤枉好人

⚠ **三个坑**：① 单双侧分位点用错；② 把 σ 和 S 混用；③ 结论写"证明 H_0 正确"—— 只能说"不拒绝/接受"。

自测 · 2 道

1. 检验 $\mu>10$ 是单侧还是双侧?
2. α 增大，拒绝域变大还是变小?

1. 单侧（右侧）。

2. 变大，更容易拒绝。

2025 卷 · 真题 1 道

2025 · 解答6

○ 会　○ 卡　○ 不会

设两正态总体 $X \sim N(\mu_1, 0.3^2)$ 与 $Y \sim N(\mu_2, 0.4^2)$ 相互独立，μ_1, μ_2 未知。各取容量 16 的样本，算得 $\bar{x} = 9.90$，$\bar{y} = 10.05$。在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，（1）能否认为 $\mu_1 = 10$；（2）能否认为 $\mu_1 = \mu_2$。

（$z_{0.025} = 1.96$，$z_{0.05} = 1.65$）

一句话：这道题就是方差已知的双侧 U 检验，算 u 值和 1.96 比大小。

① 第一问设 H_0: $\mu_1 = 10$，双侧拒绝域 $|u| \geq z_{0.025} = 1.96$。

② 统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - 10}{\sigma_1/\sqrt{16}} \sim N(0,1)$。

关键式子：$u = \dfrac{9.90 - 10}{0.3/4} = -\dfrac{4}{3} \approx -1.33$ ③ $|u| = 1.33 < 1.96$，接受 H_0，可认为 $\mu_1 = 10$。

④ 第二问设 H_0: $\mu_1 = \mu_2$，统计量分母是两方差和再开方。

关键式子：$u = \dfrac{9.90 - 10.05}{\sqrt{0.3^2/16 + 0.4^2/16}} = \dfrac{-0.15}{0.5/4} = -1.2$ ⑤ $|u| = 1.2 < 1.96$，接受 H_0，可认为 $\mu_1 = \mu_2$。

⑥ **注意：先合成方差再开方，$\sqrt{0.25/16}$ 才是 $0.5/4$。**

⑦ 得出：**答案 两问都接受原假设，即都可认为成立**

2024 卷 · 真题 2 道

2024 · 填5　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，对 μ 的检验接受域为 $(-\infty,t_\alpha(n\text{-}1))$，分界点 μ_0。则统计量为____，假设为____。

一句话：接受域在左半轴 ⇒ 右侧检验，σ 未知用 t。

① 拒绝域是 $T\geq t_\alpha(n\text{-}1)$，单侧在右。

② 故备择假设取 $\mu>\mu_0$。

③ 关键式子：$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n\text{-}1)$。

答案 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$；$H_0:\mu\leq\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$

2024 · 解答6

○ 会　○ 卡　○ 不会

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 抽 8 个：$\overline{x}=15.05$，$s_1^2=0.2285$；$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 抽 9 个：$\overline{y}=14.90$，$s_2^2=0.0575$。(1) 置信度 0.90 下用方差比判断 σ_1^2,σ_2^2 大小；(2) 以该判断为备择，$\alpha=0.05$ 检验。

一句话：方差比用 $F=S_1^2/S_2^2$，先区间后单侧检验。

① 枢轴量 $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(7,8)$。

② 置信度 0.90 ⇒ $\alpha=0.10$，分位点用 $F_{0.05}$。

③ 关键式子：区间 $\left(\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{0.05}(7,8)},\ \dfrac{s_1^2}{s_2^2}F_{0.05}(8,7)\right)$。

④ 代入 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=3.974$，得 $(1.135,14.82)$，下限 $>1\Rightarrow\sigma_1^2>\sigma_2^2$。

⑤ 检验 $H_0:\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$，拒绝域 $F\geq3.50$。

⑥ $F=3.974>3.50$ ⇒ 拒绝 H_0，结论一致。

答案 (1) $(1.135,14.82)$，$\sigma_1^2>\sigma_2^2$；(2) 拒绝 H_0

2023 卷 · 真题 2 道

2023 · 选5 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

$X_1,\dots,X_n$ 来自 $N(\mu,\sigma^2)$，检验 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则 ____。

A. $\alpha=0.05$ 拒绝则 $\alpha=0.01$ 必拒绝

B. $\alpha=0.05$ 拒绝则 $\alpha=0.01$ 必接受

C. $\alpha=0.05$ 接受则 $\alpha=0.01$ 必拒绝

D. $\alpha=0.05$ 接受则 $\alpha=0.01$ 必接受

一句话：α 越小，拒绝域越小，越难拒绝。

① 用 p 值判断最清楚：拒绝 ⇔ p 值 < α。

② $\alpha=0.05$ 接受 ⇒ p 值 > 0.05 > 0.01。

③ 所以在 0.01 下也接受。

答案 D

2023 · 解答6

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

9 个样本 $\bar{x}=4.378$，$s=0.3153$，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。$\alpha=0.05$ 下 (1) 能否认为 $\mu\geq4.4$；(2) 求 95% 置信区间。

（$t_{0.05}(8)=1.860$，$t_{0.025}(8)=2.306$）

一句话：一个左侧 t 检验，再加一个 t 区间估计。

① $H_0:\mu\geq4.4$，$H_1:\mu<4.4$。

② $t=\dfrac{4.378-4.4}{0.3153/3}\approx-0.21$。

③ 拒绝域 $t\leq-1.860$，而 $-0.21>-1.860$ ⇒ 接受 H_0。

④ 区间：$\Delta=\dfrac{0.3153}{3}\times2.306\approx0.24$。

⑤ 得 $[4.14,4.62]$。

答案 (1) 接受，可认为 $\mu\geq4.4$；(2) $[4.14,4.62]$

2022 卷 · 真题 1 道

2022 · 解答6

○ 会　○ 卡　○ 不会

断裂强度 $X\sim N(\mu,40^2)$，样本 $n=9$，$\bar{x}=780$。$\alpha=0.05$ 下能否认为 $\mu=800$？（$z_{0.025}=1.96$）

一句话：方差已知，对均值做双侧 Z 检验。

① $H_0:\mu=800$，$H_1:\mu\neq800$。

② 关键式子：$z=\dfrac{780-800}{40/3}=-1.5$。

③ 拒绝域 $|z|>1.96$。

④ $1.5<1.96\Rightarrow$ 接受 H_0。

答案 接受 H_0，可认为 $\mu=800$

17 整卷速查

考前 15 分钟

每类题只留"第一步该写什么"。

六道解答题的固定流程

题型	第一步	最后一步
全概率 / 贝叶斯	设 A_i 划分	贝叶斯 = 这一条 ÷ 全部
二维密度	$\iint f=1$ 定常数	独立看 $f=f_Xf_Y$
函数分布	$F_Y(y)=P(g(X)\le y)$	求导 + 分段验算
数字特征	先求 $EX,EY,E(XY)$	$D=EX^2-(EX)^2$
参数估计	矩：$EX=\bar{X}$ 似然：写 L	解方程 / 求导令零
假设检验	写 H_0,H_1	比较统计量与分位点

进考场前最后看的 8 条

$P(A\mid B)=P(AB)/P(B)$	条件概率
$F(x)=P(X\le x)$	分布函数
$f=f_Xf_Y\Leftrightarrow$ 独立	独立性
$D=EX^2-(EX)^2$	方差
$\mathrm{Cov}=E(XY)-EX\cdot EY$	协方差
$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	统计量
$L=\Pi f(x_i)$	似然
$\overline{X}\pm t_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	区间估计

最后一句：这门课 40 分靠概念、60 分靠流程。**六道解答题的流程背下来，比多刷十道题有用。**