2024 期末 · 100 分 · 从头学 · 五块内容

# 大物（下）
# 期末精讲

这本按"**从来没学过**"来写：每个概念都先问"为什么要有它"，公式都推一遍，然后配两三道由浅入深的例题。**不跳步，不假设你记得期中。**

目录


00 这张卷子考什么，以及怎么用这本
01 电荷与库仑定律
02 电场与场强：从"超距"到"场"
03 高斯定理：绕开积分的高速公路
04 电势：把矢量变成标量
05 导体与电介质
06 电容与电场能量
07 静电场综合练习
08 磁场的基本规律：从奥斯特实验说起
09 安培环路定理
10 磁介质与磁场力
11 法拉第电磁感应定律与楞次定律
12 动生电动势
13 感生电动势与涡旋电场
14 自感、互感与磁能
15 狭义相对论（上）：两条假设与三个效应
16 狭义相对论（下）：变换与动力学
17 黑体辐射与光电效应
18 康普顿散射
19 德布罗意波
20 氢原子与四个量子数
21 一维无限深势阱
22 整卷速查：24 道题一句话

# 00 这张卷子考什么，以及怎么用这本

8 分钟

先花八分钟把地图看清，后面每一讲才不会迷路。

> **一句话：**期末只考五块 —— **静电场、稳恒磁场、电磁感应、狭义相对论、量子初步**。**没有振动、波动、光学**，那三章一个字都不用看。

## 卷面结构

| 题型 | 题量 | 分值 | 它到底在考什么 |
|---|---|---|---|
| 选择题 | 10 题 | 3 × 10 = 30 | **概念辨析**：谁决定谁、变不变、方向朝哪 |
| 填空题 | 10 题 | 3 × 10 = 30 | **单个公式**：抓住一个式子代进去 |
| 计算题 | 4 题 | 10 × 4 = 40 | **分步给分**：写对第一步就有分 |

? 你可能已经发现：**60 分是"知道就会、不知道就零分"的题**。这部分的性价比最高。
而 40 分的计算题，每题 2~3 问，**第一问通常就是套公式**。所以这本的力气分布是：**概念讲透 → 公式推一遍 → 例题由浅入深**。

## 五块的分值分布

| 模块 | 分值 | 对应讲 | 难度 |
|---|---|---|---|
| 静电场 | 约 30 | 01–07 | ★★☆ 概念多，但套路固定 |
| 稳恒磁场 | 约 25 | 08–11 | ★★☆ 和静电对照着学最省力 |
| 电磁感应 | 约 20 | 12–15 | ★★★ 方向判断最容易错 |
| 狭义相对论 | 约 15 | 16–18 | ★★☆ 公式少，但要理解"谁的钟" |
| 量子初步 | 约 10 | 19–21 | ★☆☆ 全是记忆型，最好拿 |

## 每一讲的固定结构

| 块 | 你要做的事 |
|---|---|

| | |
|---|---|
| **① 一句话** | 这一讲到底在解决什么问题。看不懂也往下走。 |
| **② 先想一个问题** | 让脑子"卡"一下，带着问题读效率高得多。 |
| **③ 讲清楚** | **这是主体**：概念从哪来、公式怎么推、图怎么看。有小提问。 |
| **④ 必背** | 黄框。这一讲真正要记住的就这几条。 |
| **⑤ 例题** | 由浅入深 2~3 道。先自己做，再展开看。 |
| **⑥ 坑** | 橙框。往年这里死人最多。 |
| **⑦ 自测** | 绿框。3 道，答案折叠着。 |

## 怎么用上面那两个开关

| 开关 | 作用 | 什么时候用 |
|---|---|---|
| **知识 + 题目 / 只看题目** | 切到"只看题目"，所有讲解、公式、图示全部隐藏，**只剩题目** | 第二轮自测：只看题，不看讲义 |
| **会 / 卡 / 不会** | 每道题右上角有 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会，点一下就打标；筛选只显示对应标记的题 | 第三轮：只看"不会"的那几道 |

每讲末尾都有「历年真题」区，收着 **2024 / 2023 / 2022 / 2021 四套卷子**里属于这一讲的题，一共 **82 道**。答案默认折叠，点「看讲解」才展开。

### 三条路线

| 你还有 | 怎么走 |
|---|---|
| **五天以上** | 01 → 21 顺序走，每讲 30 分钟。走完做 22 讲的整卷速查。 |
| **两天** | 每天四块：静电场（01–07）、磁场（08–11）、感应（12–15）、相对论+量子（16–21）。 |
| **一天** | 只走"讲清楚"里的前两节 + 所有必背 + 所有例题。跳过自测。 |

⚠ **开卷前提醒自己三件事：**

① **公式不用背推导，但要知道它成立的前提**（比如高斯定理要对称性）。

② **方向比大小更容易错**：电场、磁力、感应电流，三个方向判断各有各的定则，别混。

③ **单位**：写答案时带上单位，阅卷老师看着舒服，你自己也不容易错量级。

## 01 电荷与库仑定律

25 分钟 · 一切开始的地方

这块内容后面所有公式的祖宗都在这里。

> **一句话：**两个静止电荷之间的力，公式和万有引力**长得一模一样**（都是平方反比），只是电荷有正负、力可以推也可以拉。

? 把两个带电小球靠近，它们之间的力会随距离怎么变？
直觉告诉你"越近越大"。但到底是 $1/r$、$1/r^2$ 还是 $1/r^3$？**这个指数决定了整个电磁学的形状。**

先讲清楚

### 一、电荷的三个基本事实

① **有两种，而且能中和。**正电荷和负电荷，等量相加会"抵消"（其实是重新分配）。

② **可以转移，不能创生。**摩擦起电不是"造出电荷"，是把电子从一个物体搬到另一个。**电荷守恒**是自然界最硬的定律之一。

③ **是量子化的。**任何电荷都是基本电量 $e=1.6\times10^{-19}$ C 的整数倍。只是宏观物体带的电荷太多，看起来像连续的。

> **为什么宏观上当成连续？**1 C 的电荷包含 $6.25\times10^{18}$ 个电子。**就像一杯水里有几亿亿个分子，你不会去数单个分子，而是说"水位"。**所以后面讲"电荷密度 $\lambda,\sigma,\rho$"完全不心虚。

### 二、库仑定律：公式与它的三个前提

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

其中 $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ C²/(N·m²)，常写成 $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9$ N·m²/C²。

**三个前提必须记住：**

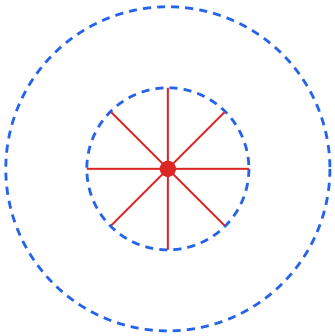
- **静止**（运动的电荷还要考虑磁力）；
- **点电荷**（尺寸远小于距离）；
- **真空**（有介质时换成 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$）。

## 三、为什么是 $1/r^2$ 而不是别的

这可以用"**通量**"来理解：把电荷想象成一个不停向四周喷水的喷头，水均匀地向所有方向喷。

在半径 $r$ 的球面上，水流密度 $=\frac{\text{总流量}}{4\pi r^2}$，**正好按 $1/r^2$ 衰减**，因为球的面积按 $r^2$ 增长。

所以 $1/r^2$ 不是巧合，它等价于说"**场线在空间里均匀铺开、不增不减**"。这就是下一讲高斯定理的核心。



同一个角锥，落到 r 处的面积

距离翻倍 → 面积变 4 倍

→ 密度变成 1/4

→ 力也变成 1/4

这就是平方反比的来源

图 1：$1/r^2$ 的几何来源 —— 同样的场线铺在越来越大的球面上。

## 四、多个电荷怎么办：叠加原理

三个以上电荷时，**两两之间的力互不干扰**。要算某一个电荷受的总力，就把其他电荷对它的力**各自算出来，再矢量相加**。

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots$$

**注意是矢量相加**：大小相同的两个力，如果夹角 $120^\circ$，合力就只剩一个力那么大。

**停一下，回答我：**两个电量分别为 $+q$ 和 $+4q$ 的小球相距 $r$。把第三个电荷放在哪里，它受力为零?

它必须在两球之间靠近小的那个。设离 $+q$ 为 $x$，则离 $+4q$ 为 $r$-$x$。力平衡：

$$\frac{q}{x^2}=\frac{4q}{(r\text{-}x)^2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}=\frac{2}{r\text{-}x}\ \Rightarrow x=\frac{r}{3}$$

离小电荷 $r/3$ 处。**注意：这个位置和第三个电荷的电量、符号都无关**（只要不为零）。

**必背 · 四条**

| | |
|---|---|
| $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$ | 库仑定律 |
| $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9$ | N·m²/C² |
| $e=1.6\times10^{-19}$ C | 基本电量 |
| 力的叠加用**矢量相加** | 不是代数相加 |

**例 1** 入门　直接代公式

两个 $+1\,\mu C$ 的点电荷相距 10 cm，求它们之间的力。

$$F=9\times10^9\times\frac{10^{-6}\times10^{-6}}{0.1^2}=9\times10^9\times10^{-12}\times100=0.9\text{ N}$$

方向：同号相斥，沿连线向外。

**例 2** 进阶　力的合成

边长 $r$ 的等边三角形三个顶点各放一个 $+q$，求某个顶点受力的大小。

每个相邻电荷给的力都是 $F_0=k\frac{q^2}{r^2}$，两个力夹角 $60^\circ$。

合力：$F=2F_0\cos30^\circ=\sqrt{3}F_0=\sqrt{3}k\frac{q^2}{r^2}$

方向：沿两个力的角平分线，指向三角形外。

**记住 $\sqrt{3}$ 这个数**：等边三角形、夹角 $60^\circ$ 的合力永远是 $\sqrt{3}$ 倍。填空题第 1 题就要用它。

⚠ **三个坑：**

① **距离用米**，别把 cm 直接代进去（差 100 倍，力差 10000 倍）。

② **电荷带符号代入还是只代大小？** 只代大小求力的大小，方向另判。直接代符号容易搞混。

③ **矢量相加不是数值相加**：两个 1 N 的力夹角 120° 时，合力只有 1 N，不是 2 N。

**自测 · 3 道**

1. 两个点电荷距离变成原来的 3 倍，静电力变成原来的多少？
2. $+q$ 与 $-q$ 之间的力是吸引还是排斥？方向怎么定？
3. 把电荷放进水中（$\varepsilon_r \approx 80$），两点电荷之间的力变成原来的多少？

**1.** $1/9$（平方反比）。

**2.** 吸引，沿连线互相靠近。

**3.** $1/80$。因为分母里 $\varepsilon_0$ 变成 $\varepsilon_0\varepsilon_r$。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 填1　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

三个电量为 $-q$（$q>0$）的点电荷，各放置在边长为 $r$ 的等边三角形的三个顶点上；电荷 $Q$（$Q>0$）放在三角形的重心上。为使每个负电荷受力为零，$Q$ 的值应为 ____。

**一句话：对任一顶点上的 $-q$ 求合力为零。**

① 第一步：两斥力夹角 60°，合力向外，大小 $\dfrac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$。

② 重心到顶点 $d = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$，$Q$ 的引力向内，大小 $\dfrac{3Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$。

③ 关键式子：$3Q = \sqrt{3}q$

④ 得出：$\boldsymbol{Q = \dfrac{\sqrt{3}}{3}q}$。

## 2023 卷 · 真题 1 道

### 2023 · 选1　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

正方形的两对角处各置电荷 $Q$，其余两角处各置电荷 $q$。若 $Q$ 所受合力为零，则 $Q$ 与 $q$ 的关系为（　）

A、$Q = -2\sqrt{2}q$

B、$Q = 2\sqrt{2}q$

C、$Q = -2q$

D、$Q = 2q$

**一句话：四电荷平衡，三个力都沿对角线。**

① 先看对称：两个 $q$ 的合力沿对角线，另一个 $Q$ 的力也沿对角线。

② 关键式子：$2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{a^2}\cos 45^\circ+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2a^2}=0$ ③ 化简得 $\boldsymbol{Q=-2\sqrt{2}q}$，选 **A**。

④ 注意：负号说明二者必须**异号**，同号时三力全朝外，不可能平衡。

## 02 电场与场强：从"超距"到"场"

35 分钟 · 连续带电体怎么算

这一讲要解决一个核心问题：**带电体不是点的时候，场怎么算？**

**一句话：把任意带电体切成无穷多个小块，每块当点电荷算，最后积分加起来。所有连续带电体的题都是这一个动作。**

？ 一根带电的细棒，求它旁边某点的场强。
棒上的电荷不在一个点上，没法直接用点电荷公式。
**但把棒切成很多很多小段，每一小段不就能当点电荷了吗？**

先讲清楚

### 一、为什么要有"场"这个概念

牛顿的万有引力是"超距作用"：两个物体不接触就有力。听着很怪，但能用。

法拉第换了个说法：**电荷不是直接推另一个电荷，而是先在周围建立"场"，再由场去推。**

这个说法的好处是：**场在空间里每一点都有确定的值**，可以用一个函数 $\vec{E}(\vec{r})$ 描述。而且它把"谁是原因、谁是结果"分清楚了。

后来发现，场是真实存在的（能携带能量、动量），不是数学技巧。

## 二、场强的定义：单位电荷受的力

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

$q_0$ 是"试探电荷"（很小，不会把原来的电荷分布搅乱）。

- **大小**：每库仑受多少牛顿，单位 N/C；
- **方向**：正电荷受力的方向；
- **要点**：场是"空间的性质"，有试探电荷时它在，没有它也在。

> **另一个常用单位**：V/m。它和 N/C 是同一回事（后面学电势时你会看到为什么）。**空气击穿场强约 $3\times10^6$ V/m**，可以当作量级参考。

## 三、点电荷的场

把库仑定律除以 $q_0$ 就得到：

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

方向：正电荷向外，负电荷向内。**注意这里已经是"场"的公式，和试探电荷无关了。**

## 四、场线：把场画出来

规则有三条，都很好理解：

1. **从正电荷出发，到负电荷终止**（或伸向无穷远）；
2. **线的疏密表示大小**：密的地方场强；
3. **线不相交**：否则一点有两个方向，矛盾。

**场线是"假的"**（它不在空间里真实存在），但它是理解场最强的工具。




单个正电荷：向外发散　　一对正负电荷：中间最密

图 2：场线的疏密就是场强的强弱。中间最密的地方场最强。

## 五、连续带电体：三步走

这是这一讲的核心方法，**顺序不能变**：

1. **取一小段** $dq$（细棒用 $dq=\lambda\,dx$，面用 $\sigma\,dS$，体用 $\rho\,dV$）；
2. **把它当点电荷写出** $d\boldsymbol{E}$，**并画图标出方向**；
3. **分解、积分**，利用对称性把不需要的分量抵消掉。

**第 3 步的关键是"对称性"**：如果能看出某些方向的分量会互相抵消，就只剩一个分量要积，工作量减一大半。

> **停一下，回答我：**一根均匀带电的细棒（线密度 $\lambda$），求它**延长线**上距离近端 $a$ 处的场强。你会怎么取 $dq$?

把棒沿长度方向放，取一个位置 $x$、宽 $dx$ 的小段，$dq=\lambda\,dx$。

它到所求点的距离是 $x$，所以 $dE=\dfrac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$。

所有小段产生的场都**沿同一方向**（都在延长线上），所以直接标量积分：

$$E=\int_a^{a+l}\frac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)$$

**关键点：这题的场全在一个方向上，所以不用分解。**如果求的是中垂线上的场，就要分解、抵消了。

**必背 · 五条**

| | |
|---|---|
| $\vec{E}=\vec{F}/q_0$ | 场强定义 |
| $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ | 点电荷 |
| $dq=\lambda\,dx=\sigma\,dS=\rho\,dV$ | 三种取法 |
| 场线疏密 = 场强大小 | 从正到负 |
| 连续体：取 $dq$ → 写 $dE$ → 积分 | 三步固定 |

**例 2.1** 标准题型　均匀带电圆环轴线上的场

半径 $R$ 的均匀带电圆环，总电荷 $q$，求轴线上距圆心 $x$ 处的场强。

**第 1 步：取一小段。**环上取 $dl$，$dq=\lambda\,dl$，它到轴线上那点的距离是 $\sqrt{R^2+x^2}$：

$$dE=\frac{\lambda\,dl}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)}$$

**第 2 步：分解。**$dE$ 沿"环心到该点"的连线。**垂直于轴线的分量**：环上对称位置的那一小段会产生相反的分量，**完全抵消**。

只剩沿轴线的分量：$dE_x=dE\cos\theta$，其中 $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$。

**第 3 步：积分。**$\cos\theta$ 和 $R^2+x^2$ 对所有 $dl$ 都相同，可以提出来：

$$E=\frac{\lambda\,x}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\oint dl=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

**验算两个极端：**$x=0$ 时 $E=0$（圆心处抵消）；$x\gg R$ 时 $E\to\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$（远处看就是个点电荷）✓

**例 2.2** 拔高　无限长带电直线的场（为高斯定理做铺垫）

线密度 $\lambda$ 的无限长均匀带电直线，求距它 $r$ 处的场强。

**取一段 $dx$**（位置 $x$，从垂足算起），$dq=\lambda\,dx$，到所求点距离 $\sqrt{r^2+x^2}$。

**对称性：**上下对称的两段，垂直于 $r$ 的分量抵消，**只剩沿径向的分量**。

$$dE_\perp=\frac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

从 -∞ 积到 +∞，用 $\int\dfrac{dx}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\dfrac{x}{r^2\sqrt{r^2+x^2}}$，得

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,r}$$

**结论：按 $1/r$ 衰减，不是 $1/r^2$。**因为它是"无限长"的，越远反而有更多段在贡献。

⚠ **四个坑：**

① **忘记分解。**连续体的 $dE$ 是矢量，直接对标量积分是最常见的错。**先看对称性，能抵消的先**

**划掉。**
② **$dq$ 写错。**细棒用 $\lambda\,dx$，环用 $\lambda\,dl$，面用 $\sigma\,dS$。**看题目给的是"线密度""面密度"还是"总电荷"。**
③ **积分限放错。**先画图，标清楚积分变量从哪到哪。
④ **单位**：$\lambda$ 的单位是 C/m，$\sigma$ 是 C/m²。

**自测 · 3 道**

1. 把点电荷的场强公式里 $r$ 变成 $2r$，场强变成多少?
2. 两根平行的无限长带电直线（同号），中间某点的场强怎么算?
3. 为什么求圆环轴线场强时，垂直分量可以"直接扔掉"?

**1.** $1/4$。

**2.** 分别算出两个场，**矢量相加**（中间那点两场方向相反，相减）。

**3.** 因为环上关于轴线对称的两小段产生的垂直分量大小相等、方向相反，**成对抵消**。

## 2022 卷 · 真题 1 道

### 2022 · 算1　10 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

半径为 $R$ 的均匀带电圆盘，面电荷密度 σ。试求穿过圆盘中心 O 的轴线上距 O 为 $x$ 处的 P 点的电场强度 $\vec{E}$。

**这是连续带电体求场强的标准套路：先取电荷元，写出它产生的 $d\vec{E}$，再用对称性判断方向、用积分叠加。**

把圆盘看成许多同心的细圆环。

取半径 $r$、宽 $dr$ 的环，其电荷量为 $dq = \sigma \cdot 2\pi r\, dr$

细圆环在轴线上 P 点产生的场强沿轴线方向（垂直于轴的分量由对称性互相抵消），大小为

$$dE = \frac{dq \cdot x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

由于各环在 P 点产生的场方向相同，可以直接积分：$E = \int_0^R dE = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$

令 $u = x^2 + r^2$，则 $r\, dr = \frac{1}{2} du$，积分得 $E = \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0} \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0} \cdot (-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{1}{x}\right)$

整理得 $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$ **方向沿轴线背离圆盘（$\sigma > 0$ 时），大小为**

$$\boldsymbol{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)}。$$

可以拿两个极限检验：$x \to 0$ 时 $E \to 0$，盘心附近上下对称场相互抵消，合理；$R \to \infty$ 时 $E \to \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，正是无限大均匀带电平面的结果。

注意：细圆环的电荷是 $dq = \sigma \cdot 2\pi r\, dr$（面积元），不要写成 $\sigma\pi r^2$（那是整个圆盘的电荷）；另外 $x < 0$ 时上式给负值，表示场反向，若只问大小应取绝对值。

## 2021 卷 · 真题 1 道

### 2021 · 选1　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

沿 $x$ 轴放置的"无限长"分段均匀带电直线，$x<0$ 处为 $+\lambda$、$x>0$ 处为 $-\lambda$，则 $Oxy$ 平面上 $P(0,a)$ 处的场强 $\vec{E}$ 为（　）

(A) $\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{i}$

(B) $\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\vec{i}$

(C) $\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\vec{i}+\vec{j})$

(D) 0

**一句话：两段半无限长线电荷叠加，竖直分量相消、只剩水平分量。**

① 先按 $x<0$ 与 $x>0$ 拆成两条半无限长线段分别积分。

② 关键式子：$E_{1x}=E_{1y}=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$，而 $E_{2y}=-E_{1y}$。

③ 相加得 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{i}$，**答案 A**。

④ 注意：异号只抵消竖直分量，水平分量反而加倍。

## 03 高斯定理：绕开积分的高速公路

40 分钟 · 本节是全章重点

上一讲求无限长直线的场，积了半页。这一讲用两行。

**一句话：**从一个闭合曲面穿出去的电场线总数，**只由面内的电荷决定**，与面外电荷、曲面形状都无关。

? 把一个点电荷用球面包起来，穿出去的场线是 100 条。
现在把球面换成一个奇形怪状的封闭曲面，还是包着这个电荷 —— 穿出去的场线还是 100 条吗?
**是。这就是高斯定理的全部内容。**

先讲清楚

### 一、先严格定义"通量"

通量不是"穿过的场线条数"这么模糊。严格定义是：

$$\Phi_E=\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S}$ 是面元，**方向取外法线**。$\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\,dS\cos\theta$，$\theta$ 是场与法线的夹角。

三个位置理解：

- 面正对着场（$\theta=0$）：通量最大；
- 面侧过来（$\theta=90^\circ$）：通量为 0；
- 面反过来（$\theta>90^\circ$）：通量为负（场线"穿进去"）。

## 二、高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\Sigma q_{内}}{\varepsilon_0}$$

**为什么只算面内的？** 外面的电荷产生的场线，穿进去多少就穿出来多少，净贡献为零。
就像一根线穿过一个袋子：从这边进、从那边出，袋子里的"线的净数量"没变。

## 三、它的价值：把"积分"变成"乘法"

高斯定理本身永远成立，但只有**场强在曲面上处处相等、且方向垂直于曲面**时，才能把积分拆成 $E\cdot S$。

这就引出**三类必须记住的对称性**：

| 对称性 | 高斯面怎么取 | 结果 |
| --- | --- | --- |
| **球对称** | 同心球面（半径 $r$） | $E\cdot 4\pi r^2=\frac{q_{内}}{\varepsilon_0}$ |
| **轴对称** | 同轴圆柱面（半径 $r$，高 $h$） | $E\cdot 2\pi rh=\frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$ |
| **面对称** | 跨板的扁盒子（两面各 $S$） | $E\cdot 2S=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ |

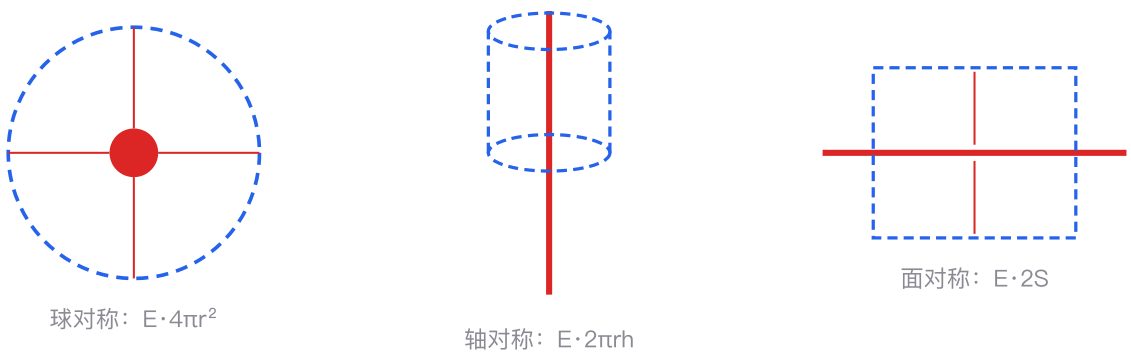



图 3：三类对称性对应三种高斯面。取对了，积分立刻变成乘法。

## 四、三类模型的完整结果（要会推，不要只背）

**① 均匀带电球面（半径 $R$，总电荷 $q$）**

球外 $r>R$：$E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$（等同于点电荷）。
球内 $r<R$：面内电荷为 0 $\Rightarrow E=0$。

**② 无限长均匀带电直线（线密度 $\lambda$）**

$E\cdot 2\pi rh=\dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$。

**③ 无限大均匀带电平面（面密度 $\sigma$）**

取跨板扁盒，两侧各 $S$：$E\cdot 2S=\dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$。

**注意这个结论最反直觉：无限大板的场与距离无关，是匀强场。**

> **停一下，回答我：**两块平行无限大板，一块 $+\sigma$，另一块 $-2\sigma$。两板之间、板的外侧，场强各是多少?

每块板各自产生 $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 和 $\dfrac{2\sigma}{2\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，方向都是"离开自己"。

**两板之间：**两个场方向相反 $\Rightarrow E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$。

**板外侧：**两个场方向相同 $\Rightarrow E=\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$。

**口诀：同向相加，反向相减。**先分别画箭头，再合成。

**必背 · 六条**

| | |
|---|---|
| $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{\Sigma q_{内}}{\varepsilon_0}$ | 高斯定理 |
| 球外 $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，球内 0 | 球面对称 |
| $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ | 无限长直线 |
| $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ | 无限大板，**匀强** |
| 两板之间：场叠加 | 同向加、反向减 |
| 面外电荷对通量无贡献 | 但对场强有 |

⚠ **四个坑：**

① **以为高斯定理只能用在对称情况。**定理本身永远成立，只是**不对称时算不出 $E$**（因为 $E$ 在面上不是常数，提不出来）。

② **把面外电荷也算进 $\Sigma q_{内}$。**面外的电荷只影响场强，不影响通量。

③ **无限大板的场忘了除以 2。**只有**单面**时才乘 $2S$ 得到 $\sigma/(2\varepsilon_0)$；两块板要另外叠加。

④ **法线方向搞反。**通量有正负，但一般题目只问大小。

**自测 · 3 道**

1. 均匀带电球壳内部场强是多少？为什么？
2. 把高斯面扩大一倍（仍然包着同一个电荷），通量变不变？场强变不变？
3. 无限大带电板的场强，离板 1 m 和 100 m 处哪个大？

**1.** 为 0。球壳内任取同心球面，面内没有电荷，所以 $E\cdot 4\pi r^2=0$。

**2.** 通量不变（面内电荷没变），**场强变小**（点电荷场按 $1/r^2$）。

**3.** 一样大，都是 $\sigma/(2\varepsilon_0)$。匀强场。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 选1　3 分　○ 会　○ 卡　○ 不会

一个点电荷 $+Q$ 被闭合曲面 $S$ 所包围，若从无穷远处将另外一个点电荷 $q$ 移动到闭合曲面 $S$ 外附近一点，则移动点电荷 $q$ 前后，以下说法中正确的是（ ）。

A. 闭合曲面 $S$ 的电通量不变，曲面上各点的电场强度不变

B. 闭合曲面 $S$ 的电通量变化，曲面上各点的电场强度不变

C. 闭合曲面 $S$ 的电通量变化，曲面上各点的电场强度变化

D. 闭合曲面 $S$ 的电通量不变，曲面上各点的电场强度变化

**一句话：通量只认内部电荷，场强才认全部电荷。**

① 第一步看高斯定理：闭合面的通量只由面内电荷决定。

② 关键式子：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{Q_{内}}{\varepsilon_0}$

③ $q$ 在面外，通量仍是 $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$，**不变**；但面上各点多了 $q$ 的场，场强**变化**。

④ 得出：**答案 D**。

## 2023 卷 · 真题 1 道

### 2023 · 填1　3 分　○ 会　○ 卡　○ 不会

点电荷 $q$ 位于立方体的 $A$ 角上，则通过侧面 $abcd$ 的电场强度通量等于 _____（$abcd$ 不过 $A$ 点）。

**一句话：把立方体补成 8 块，用对称性分通量。**

① 造闭合面：以 A 为中心补成大立方体，共 8 块。

② 关键式子：$\Phi_{总}=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$，每块占 $\dfrac{q}{8\varepsilon_0}$。

③ 过 A 的 3 个面通量为零，剩下 3 面平分。

④ 得出：$\boldsymbol{\dfrac{q}{24\varepsilon_0}}$。

## 2022 卷 · 真题 1 道

### 2022 · 选1 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

真空中两块互相平行的无限大均匀带电平板，其中一块的面电荷密度为 +σ，另一块的面电荷密度为 +2σ，两板间的距离为 $d$，两板间的电位差为（ ） A、0

B、$\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}d$

C、$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$

D、$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d$

**这题考的是无限大均匀带电平板的场强叠加，再套匀强场中 $U = Ed$。**

单块无限大均匀带电板两侧的场强都是 $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，方向垂直板面向外。

两板之间，+σ 板的场指向 +2σ 板，+2σ 板的场指向 +σ 板，两者反向。

规定由 +σ 板指向 +2σ 板为正，则 $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 即板间场强大小为 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，方向指向 +σ 板。

板间是匀强场，电位差 $U = Ed = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}$，故选 **D**。

注意：两板的场要相减而不是相加，相加得到的 $\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}d$ 正是 B 选项的陷阱；另外单块板的场是 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，不要漏掉这个 1/2 而误选 C。

2021 卷 · 真题 1 道

**2021 · 选4** 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

球形闭合面 $S$ 只套住条形磁铁的一部分，把 $S$ 扩大直到完全包住磁铁，此过程中通过 $S$ 的磁通量（ ）

(A) 逐渐增大

(B) 逐渐减小

(C) 始终为 0

**一句话：磁高斯定理，闭合曲面的磁通量恒为零。**

① 磁感线闭合、没有磁单极子，穿入必有穿出。

② 关键式子：$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$。

③ 得出：半径怎么增，通量都是 0，**答案 C**。

④ 注意：别以为"包住的磁铁越多，通量越大"。

## 04 电势：把矢量变成标量

40 分钟 · 这一讲之后,大部分计算都变简单

场强是矢量，加一个就要分解一次。电势是标量，直接加减。

**一句话：**电势是"**把单位正电荷从某点搬到无穷远，电场做的功**"。它是标量，所以多个电荷的电势**直接代数相加**。

? 算一个点处有几个电荷产生的总场强，你要分解、合成，很麻烦。
但如果只想知道"把一个电荷放在那会有什么能量"，有没有更省事的量?
**有，就是电势。它把矢量问题变成了加法。**

先讲清楚

### 一、先证明静电场的环路定理

为什么电势可以定义？因为我们得先知道："电荷绕一圈回到原点，电场做的功是零"。这就是**环路定理**：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

对**静电场**它恒成立（从库仑定律可以证明）。这说明静电力是**保守力**，可以引入势能。

注意：后面学"感生电动势"时，涡旋电场的环路积分**不为零**，那种场就不能定义电势。这是两章的分水岭。

## 二、电势能与电势

把 $q_0$ 从 $A$ 搬到 $B$，电场做功 $W=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}$。势能的减少等于这个功：

$$W_{A\to B}=U_A^{能}-U_B^{能}$$

把"单位电荷"提出来，就得到**电势差**：

$$U_A-U_B=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

取无穷远为 0，则某点的电势：

$$U_A=\int_A^{+\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

## 三、点电荷的电势

把 $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 从 $r$ 积到 $\infty$：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

**注意：这里是 $1/r$，不是 $1/r^2$。**因为电势是场强的"累积"（积分），积分把指数加了一。

## 四、叠加原理（这是它最大的好处）

$$U=U_1+U_2+\cdots=\Sigma_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

**标量直接加减，注意正负号就行**，不用分解方向。这就是为什么求电势比求场强简单。

> **反过来，已知电势求场强：**
>
> $$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}$$
>
> 或者写成 $\vec{E}=-\nabla U$。**负号表示：场强指向电势降低的方向。**
>
> 一维时就是 $E=-\dfrac{dU}{dx}$：**U-x 图上的斜率（取负）就是场强。**

## 五、连续带电体的电势

和场强一样切小块，但**不用分解**：

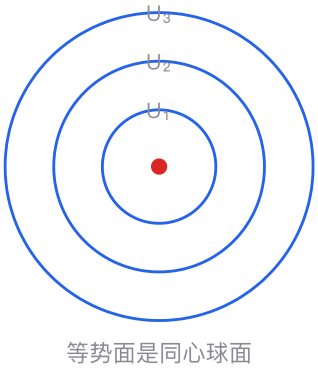
$$U=\int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

注意 $r$ 是"电荷元到所求点"的距离，它可能是坐标的函数，**要放进积分里**。

## 六、等势面

电势相同的点连成的面叫等势面。它有三个性质：

- **场强垂直于等势面**（否则沿面会有电场做功能量变化，矛盾）；
- **电场线从高等势面指向低等势面**；
- **等势面越密，场强越大**（同样的电势差间隔，距离越短，$E=-\Delta U/\Delta x$ 越大）。




场强 ⊥ 等势面

场强 → 电势低的地方

等势面越密 → 场强越大

这三条能秒掉一类选择题

图 4：等势面与电场线永远垂直。沿场线走，电势一定降低。

**停一下，回答我：**两个等量异号电荷（$+q$ 和 $-q$），它们的连线中点电势是多少？中点场强是多少？

**电势：**两个电荷到中点距离相同，一个 + 一个 -，**代数相加正好为 0**。

**场强：**两个场都指向 $-q$，**同向相加**，是 $2\times\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(d/2)^2}=\frac{2q}{\pi\varepsilon_0 d^2}$，不为 0。

**这就是电势的好处和陷阱：**电势为 0 的地方，场强可以很大。

**必背 · 六条**

| | |
|---|---|
| $U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ | 点电荷电势（$1/r$！） |
| $U=U_1+U_2+\cdots$ | 标量叠加，带正负号 |
| $U_A-U_B=\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{l}$ | 电势差 |
| $E_x=-\partial U/\partial x$ | 场强是电势的负梯度 |
| $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ | 静电场环路定理 |
| 场强 ⊥ 等势面 | 指向电势降低方向 |

**例 4.1** 标准案例　均匀带电球面的电势

半径 $R$、总电荷 $q$ 的均匀带电球面。求球外和球内的电势。

---

**球外 $r>R$**：场强是 $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，积分到无穷：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

**球内 $r<R$**：球内场强为 0，所以从 $r$ 走到球面（$R$）不做功，**电势不变**：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$（球内处处相等，是个等势体）

**对比：**球内**场强**为 0，但**电势**不为 0（等于球面的值）。**这两个结论经常一起考。**

⚠ **四个坑：**

① **把 $1/r$ 记成 $1/r^2$。**电势是 $1/r$，场强是 $1/r^2$。**积分一次指数加一。**

② **电势叠加时忘了带符号。**负电荷的电势是负的，要减。

③ **以为"电势为 0 ⇒ 场强为 0"。**反例就在上面的等量异号电荷中点。

④ **求球内电势时直接写 0。**球内场强是 0，但电势等于球面的值。

**自测 · 3 道**

1. 两电荷中间某点电势为 0，该点场强一定为 0 吗?
2. 沿电场线方向走，电势是升高还是降低?
3. 把 $+q$ 从电势高处移到低处，电场做正功还是负功?

**1.** 不一定。见等量异号电荷中点。

**2.** 降低（这是场强方向的定义）。

**3.** 正功。正电荷"顺流而下"。

## 2024 卷 · 真题 2 道

### 2024 · 选2 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

真空中两块互相平行的无限大均匀带电平板，其中一块的面电荷密度为 $+\sigma$，另一块的面电荷密度为 $+2\sigma$，两板间的距离为 $d$，则两板间的电势差为（ ）。

A. 0

B. $\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}d$

C. $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$

D. $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d$

**一句话：同号大板的场要相减，再用 $U=Ed$。**

① 第一步：单块无限大板两侧的场都是 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，方向背离板面。

② 关键式子：$E=\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

③ 板间是匀强场，$U=Ed=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d$。

④ 得出：**答案 D**。

**注意**：只有等量异号两板之间才是 $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$。

### 2024 · 填2 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

若已知空间各点的电势分布 $U$，则某一点 $P$ 的电场强度在直角坐标系 $x$ 轴方向的分量大小 $E_x=$ ____。

**一句话：场强是电势的负梯度，问大小就取绝对值。**

① 第一步：$\vec{E}=-(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})$，故 $E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$。

② 关键式子：$E_x=|\frac{\partial U}{\partial x}|$

③ 得出：$\boldsymbol{E_x=|\frac{\partial U}{\partial x}|}$。

**注意**：问"分量"就答 $-\frac{\partial U}{\partial x}$，问"大小"才取绝对值。

## 2023 卷 · 真题 3 道

### 2023 · 选2　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

静电场的电场线分布情况如图所示，一负电荷从 M 点移到 N 点，则（　）

A、电场强度 $E_M>E_N$，电场力做正功

B、电势 $U_M<U_N$，电场力做负功

C、电势能 $W_M<W_N$，电场力做负功

D、负电荷电势能减少，电场力做正功

（图：电场线由 N 一侧指向 M 一侧并逐渐变疏，M 处电场线较疏）

**一句话：电场线判场强、判电势、判做功，一条链。**

① 疏密定场强：M 处线疏，故 $E_M<E_N$。

② 走向定电势：线由 N 指向 M，沿场线电势降低，$U_M<U_N$。

③ 负电荷受力与 $\vec{E}$ 反向，从 M 到 N 力与位移同向。

④ 关键式子：$W_{MN}=q(U_M-U_N)=(-|q|)(U_M-U_N)>0$ ⑤ 得出：做正功、电势能减少，选 **D**。

### 2023 · 填2　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

半径 $R$、电量 $Q$ 的均匀带电球面，若规定球面上电势为零，则无限远处的电势等于 _____。

**一句话：换电势零点 = 整体减同一个常数。**

① 先写原结果：球面上 $V(R)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$。

② 关键式子：$V'(r)=V(r)-V(R)$，再令 $r\to\infty$。

③ 得出：$\boldsymbol{-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$。

注意：别丢负号。

### 2023 · 算1 10 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

内外半径 $R_1$,$R_2$、面密度 $\sigma$ 的均匀带电圆环。质子从轴线上距圆心 $L$ 的 $P$ 点射向圆心 $O$，到达 $O$ 时速度恰好为零。求质子在 $P$ 点的动能。

**一句话："到 O 点速度为零" ⇒ 动能 = 电势能之差。**

① 拆环：取半径 $r$、宽 $dr$ 的细环，$dq=\sigma\cdot 2\pi r\,dr$。

② 细环在 $P$ 点：$dV_P=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{r\,dr}{\sqrt{r^2+L^2}}$。

③ 积分：$V_P=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{L^2+R_2^2}-\sqrt{L^2+R_1^2})$ ④ 令 $L=0$：$V_O=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$。

⑤ 动能定理：$E_k=e(V_O-V_P)$。

⑥ 得出：$\boldsymbol{E_k=\dfrac{\sigma e}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1-\sqrt{L^2+R_2^2}+\sqrt{L^2+R_1^2})}$

## 2022 卷 · 真题 2 道

### 2022 · 选2 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

在匀强电场中，将一负电荷从 A 移到 B，则（ ） A、电场力作正功，负电荷的电势能减少

B、电场力作正功，负电荷的电势能增加

C、电场力作负功，负电荷的电势能减少

D、电场力作负功，负电荷的电势能增加 （图：匀强电场 $\vec{E}$ 水平向右，A 点在下方的一条场线上偏左，B 点在上方另一条场线上偏右，B 位于 A 的右上前方）

**先看电场线方向定电势高低，再看电场力方向与位移方向的关系。**

图中 $\vec{E}$ 向右，沿电场线方向电势降低，所以 $V_A > V_B$。

负电荷受的电场力 $\vec{F}=q\vec{E}$ 与 $\vec{E}$ 反向，指向左；而位移从 A 到 B 大体向右，故电场力作负功，

$W=q(V_A-V_B)<0$。

电势能变化 $\Delta W_p=qV_B-qV_A=q(V_B-V_A)$，其中 $q<0$、$V_B-V_A<0$，故 $\Delta W_p>0$，电势能增加。

也可直接用功能关系：电场力作负功，电势能必增加。

故选 **D**。

注意：电势能是电荷与电场共有的，对负电荷来说"电势越低处电势能越大"，这是本题最容易想反的地方。

**2022 · 填2** 3 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

在点电荷 q 的电场中，选取以 q 为中心、R 为半径的球面上一点 P 处作电势零点，则与点电荷 q 距离为 r 的 P′ 点的电势为____。（图：以点电荷 q 为圆心、半径 R 的球面，球面上一点 P 取作电势零点；P′ 在球外，到 q 的距离为 r）

**考电势的定义式：电势零点选在哪里，就从待求点积分到那里，** $V_{P'} = \int_{P'}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

**点电荷的场强沿径向，** $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$**，沿径向从** $x = r$ **积到** $x = R$**：**

$V_{P'} - V_P = \int_r^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$

**因** $V_P = 0$**，故** $V_{P'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$**。**

注意：零点取在有限距离时，结果中会出现 $\frac{1}{R}$ 这一项，只有令 $R \to \infty$ 才退化成熟悉的形式 $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$；另外公式对 $r > R$ 与 $r < R$ 都成立，只是括号的正负不同（本题图中 $r > R$，括号为负，说明零电势面外侧电势为负）。

05

# 导体与电介质

35 分钟 · 静电平衡的三条铁律

导体和电介质的区别只有一个字：**能不能跑**。

**一句话：**导体里的电荷能跑，所以它们会一直跑到**内部场强为零**；电介质里的电荷被绑着，只能偏转，所以场只是被**削弱**。

? 把一块金属放进电场里，会发生什么？
里面的自由电子会逆着电场跑，跑到一边堆积。堆积的电荷又产生反向的场。
**什么时候停？—— 直到内部两股场正好抵消。**

先讲清楚

## 一、静电平衡的三条铁律（都能推出来）

**① 导体内部** $E=0$**。**
如果内部还有场，自由电子就会继续跑，那就没"平衡"。所以平衡的标志就是内部场被抵消干净。

**② 电荷只分布在外表面。**
用高斯定理：在导体内部取一个闭合面，因为 $E=0$，通量为 0，所以面内净电荷为 0。既然内部处处如此，**电荷只能待在外表面。**

**③ 整个导体是等势体。**

因为内部 $E=0$，任意两点间 $U_A-U_B=\int \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$，所以处处电势相等。**表面也是等势面。**

## 四、表面附近的场强

在导体表面取一个扁盒子（一面在导体里，一面在外面）：

$$E\cdot S=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

**这个场强垂直于表面**（否则表面上的电荷会沿面滑动，那就不是平衡了）。

**尖端放电**就是这条的推论：曲率大的地方（尖）电荷密度大、场强强，容易把空气击穿。

## 五、静电屏蔽

空腔导体（内部没电荷）可以把外部电场"挡"在外面：**腔内场强为零**。

反过来，如果腔内有电荷，外部也能被挡住（因为外壳外表面会重新分布电荷）。**这就是法拉第笼。**




图 5：导体把电荷"赶到表面"，把外部电场"挡在门外"。

## 六、电介质：不能跑，但能偏

电介质里的正负电荷被绑在分子上。外加电场后，分子被"拉长"或转向 —— 这叫**极化**。

极化的结果：介质表面出现一层**极化电荷**，它产生的场和外场**反向**，所以介质内部的总场变弱：

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

引入**电位移矢量** $D$ 之后，公式变得更整齐（它只管自由电荷）：

$$D=\varepsilon_0\varepsilon_r E,\quad \oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\Sigma\, q_{\text{自由}}$$

**停一下，回答我：**一个带电导体球，外面套一层介质。球的电势变高还是变低？

**变低。**介质中的场强变成原来的 $1/\varepsilon_r$，所以从球面到无穷远的积分变小，电势下降。

直观理解：极化电荷把一部分场"抵消"了。

**必背 · 六条**

| | |
|---|---|
| 导体内部 $E=0$，整体等势 | 静电平衡 |
| 电荷只在外表面 | 高斯定理推出 |
| $E_{表面}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ | 垂直表面 |
| $E=\dfrac{\sigma_{自由}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$ | 介质中的场 |
| $D=\varepsilon_0\varepsilon_r E$ | 电位移矢量 |
| 尖端 $E$ 大 $\Rightarrow$ 易击穿 | 尖端放电 |

**例 5.1** 经典推论　为什么电荷往表面跑

用高斯定理证明：静电平衡时，导体内部没有净电荷。

在导体**内部**任取一个闭合曲面 $S$。

因为导体内部 $E=0$，所以穿过 $S$ 的通量为 0：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0 \Rightarrow \frac{q_{内}}{\varepsilon_0}=0 \Rightarrow q_{内}=0$$

既然任意内部曲面包住的净电荷都是 0，那么**内部处处无净电荷**。

这就是"电荷只能在外表面"的严格证明，**本质是高斯定理的一个应用**。

⚠ **三个坑：**
① **把"内部 E=0"推广到"内部 U=0"。**错，导体内部电势等于表面电势，一般不为 0。
② **介质中忘了除 $\varepsilon_r$。**$E=\sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_r)$ 而不是 $\sigma/\varepsilon_0$。
③ **导体表面场强公式多了个 2。**导体表面是 $\sigma/\varepsilon_0$，无限大带电板才是 $\sigma/(2\varepsilon_0)$ —— **因为导体板上电荷只朝一面，板上没有"另一侧"。**

**自测 · 3 道**

1. 空腔导体内部没有电荷，腔内的场强是多少?
2. 为什么避雷针要做成尖的?
3. 介质中的场强与真空相比，变大还是变小？为什么?

**1.** 0（静电屏蔽）。

**2.** 尖端电荷密度大、场强强，容易把空气电离形成放电通道，把雷电流引到地下。

**3.** 变小，变成 $1/\varepsilon_r$，因为极化电荷产生了反向的场。

## 2024 卷 · 真题 2 道

### 2024 · 选3　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

一导体球外充满相对介电常数为 $\varepsilon_r$ 的各向同性均匀电介质，若测得导体表面附近场强大小为 $E$，则导体球面上的自由电荷面密度为（ ）。

A. $\varepsilon_0 E$

B. $\varepsilon_0\varepsilon_r E$

C. $\varepsilon_r E$

D. $(\varepsilon_0\varepsilon_r - \varepsilon_0)E$

**一句话：有介质就先用 $D$，$D$ 只认自由电荷。**

① 第一步：在导体表面取扁盒高斯面，只有自由电荷是 $D$ 的源，故 $D = \sigma_{自由}$。

② 关键式子：$D = \varepsilon_0\varepsilon_r E$

③ 联立得 $\sigma_{自由} = \varepsilon_0\varepsilon_r E$。

④ 得出：**答案 B**。

**注意**：$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 只在真空（空气）中成立。

## 2024 · 算1　10 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

一半径为 $a$ 的导体球带有电荷量 $Q$，现将一半径为 $b$ 的均匀带电圆环放在球旁边，圆环的轴线通过球心，环心到球心的距离为 $r$，环上的电荷量为 $q$，如图所示。试求静电平衡时导体球的电势（以无穷远处为电势零点）。

（图：导体球与带电圆环共轴，球心到环心距离为 $r$，圆环半径为 $b$，环上电荷为 $q$）

**一句话：求导体电势就求球心电势，因为导体等势。**

① 第一步：静电平衡时导体内部无场、整体等势，故 $U_{球} = U_{球心}$。

② 第二步：球面电荷到球心都是 $a$，圆环电荷到球心都是 $\sqrt{b^2+r^2}$，与电荷怎么分布无关。

③ 关键式子：$U_O = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\int \sigma\, dS + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2+r^2}}\int dq'$

④ 代入 $\int \sigma\, dS = Q$、$\int dq' = q$，得 $U_O = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2+r^2}}$。

⑤ 得出：$\boldsymbol{U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2+r^2}}}$。

**注意**：球上电荷已被圆环重新分布，但不必去求 σ 的细节；圆环也不能当成位于环心的点电荷。

# 2022 卷 · 真题 1 道

## 2022 · 填1　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

A、B 为两导体大平板，面积均为 $S$，正对平行放置。A 板带电荷 $+Q_1$，B 板带电荷 $+Q_2$，如果使 B 板接地，则 AB 间电场强度大小为____。

**考导体静电平衡与接地后电荷的重新分布。**

接地意味着 B 板电势为零，并且可以与大地自由交换电荷，原来 B 板上的 $+Q_2$ 会流入大地。

静电平衡时导体内部场强为零，板外空间也没有电场，所以两板的外表面都不带电；A 板的 $+Q_1$ 全部落在内表面，B 板内表面感应出 $-Q_1$。

取底面积为 $S$ 的柱形高斯面跨过板间，得 $E = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$ **答案为** $\boldsymbol{\dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 S}}$**，与 $\boldsymbol{Q_2}$ 无关。**

注意：接地不等于"电荷为零"，而是"电势为零、电荷可流动"；这类题先判断哪个表面带电，再用高斯定理，切不要把 $Q_1 + Q_2$ 一起塞进公式。

## 2021 卷 · 真题 1 道

**2021 · 选2** 3 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

带正电的导体球壳：壳内充满电介质、壳外真空时，壳外一点的场强和电势为 $E_1,U_1$；壳内外均真空时为 $E_2,U_2$。则（ ）

(A) $E_1=E_2$，$U_1=U_2$

(B) $E_1=E_2$，$U_1>U_2$

(C) $E_1>E_2$，$U_1>U_2$

(D) $E_1<E_2$，$U_1<U_2$

**一句话：导体壳电荷全在外表面，腔内介质根本不改壳外场。**

① 导体静电平衡：净电荷只能分布在球壳外表面。

② 关键式子：壳外 $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，与腔内介质无关。

③ 场相同 ⇒ 积分也相同，**答案 A**。

④ 注意：若介质充满壳**外**空间，才会削弱场强、降低电势。

# 06 电容与电场能量

30 分钟 · 储能的两种算法

电容是"装电荷的容器"，能量是"装进去要做的功"。

**一句话：**电容只由**几何形状和介质**决定，与带多少电无关。它衡量的是"同样电压下能装多少电"。

? 两个导体，一个很大一个很小，充到同样的电压，谁装的电荷多？
**大的。**而"装多少 ÷ 电压"就是电容。所以电容是容器的"容量"。

先讲清楚

### 一、定义与三种电容器

$$C=\frac{Q}{U}$$

**求电容的固定三步：**① 假设带电量 $Q$；② 算出两板间的电压 $U$；③ 相除。

| 形状 | 电容 | 怎么来的 |
| --- | --- | --- |

| | | |
|---|---|---|
| 平行板（间距 $d$，面积 $S$） | $C=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$ | $E=\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r$，$U=Ed$ |
| 球形（半径 $R$） | $C=4\pi\varepsilon_0 R$ | $U=q/(4\pi\varepsilon_0 R)$ |
| 圆柱形（长 $L$，半径 $R_1$,$R_2$） | $C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$ | $E=\lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$ 积分 |

**平行板最重要**，因为绝大多数题都简化成它。

## 二、串并联

| 连接 | 公式 | 特点 |
|---|---|---|
| **串联** | $\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}$ | 电荷相同，电压相加 |
| **并联** | $C=C_1+C_2$ | 电压相同，电荷相加 |

记法：**电容和电阻反过来**——电阻串联是加，电容串联是倒数加。

## 三、电场能量

给电容器充电，要把电荷一点点搬上去，越到后面越费劲。总的功：

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}QU$$

这份能量存在**电场里**，所以可以写成能量密度（单位体积的能量）：

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2=\frac{1}{2}DE$$

**两条路求能量：** ① 知道 $C$ 和 $U$ 就直接代；② 不知道就**对能量密度积分** $W=\iiint w_e\,dV$。

> **为什么是 $\frac{1}{2}$？** 因为充电过程中电压是从 0 慢慢升到 $U$ 的，平均电压是 $U/2$。所以 $W=Q\cdot\dfrac{U}{2}=\dfrac{1}{2}QU$。**和"弹簧储能 $\frac{1}{2}kx^2$"是同一个道理。**

**停一下，回答我：** 把平行板电容器的间距拉大一倍（保持电荷不变），电容怎么变？电压怎么变？能量怎么变？

$C=\varepsilon_0 S/d$：$d$ 翻倍 ⇒ **$C$ 减半**。

$U=Q/C$：$C$ 减半 ⇒ **$U$ 翻倍**。

$W=Q^2/(2C)$：$C$ 减半 ⇒ **$W$ 翻倍。拉开板要克服吸引力做功，所以能量增加。**

**必背 · 五条**

| | |
|---|---|
| $C=Q/U$ | 定义 |
| $C=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$ | 平行板 |
| $W=\dfrac{1}{2}CU^2=\dfrac{Q^2}{2C}$ | 总能量 |
| $w_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$ | 能量密度 |
| 串联倒数加，并联直接加 | 和电阻相反 |

**例 6.1** 基础　平行板电容

平行板电容器面积 $S=0.01\ \text{m}^2$，间距 $d=1\ \text{mm}$，中间是空气。求电容；若加 100 V 电压，求储能。

$$C=\frac{8.85\times10^{-12}\times0.01}{10^{-3}}=8.85\times10^{-11}\ \text{F}\approx 88.5\ \text{pF}$$

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\times8.85\times10^{-11}\times10^4=4.4\times10^{-7}\ \text{J}$$

**例 6.2** 用能量密度 球壳电容器的能量

半径 $R$ 的导体球带电 $Q$，求它周围的电场总能量。

**路线一：用 $W=Q^2/(2C)$。**孤立球的电容 $C=4\pi\varepsilon_0 R$：

$$W=\frac{Q^2}{2\cdot 4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

**路线二：对能量密度积分。**$E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，$w=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$，从 $R$ 积到 $\infty$：

$$W=\int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\ \checkmark$$

两条路给出同一个答案，**可以互相验算**。

⚠ **三个坑：**

① **忘了 $\dfrac{1}{2}$。**能量一定要除以 2。

② **串联并联搞反。**电容串联相当于"板间距变大"，所以总电容**变小**。

③ **用 $W=\dfrac{1}{2}CU^2$ 时 $U$ 变了。**拉开板时 $U$ 会变，别拿旧的 $U$ 代。

**自测 · 3 道**

1. 两个 2 μF 的电容串联，总电容是多少?
2. 电容器充电后断开电源，再把板间距拉大，能量怎么变?
3. 能量密度公式里，场强翻倍能量密度变成几倍?

**1.** 1 μF（倒数相加）。

**2.** 变大（$Q$ 不变，$C$ 变小，$W=Q^2/2C$ 变大）。

**3.** 4 倍（$w\propto E^2$）。

## 2023 卷 · 真题 1 道

### 2023 · 填3　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

两电容器串联后接恒压电源。保持连接的情况下把电介质充入电容器 2，则电容器 1 上的电势差 _____，极板电量 _____。（增大/减小/不变）

**一句话：串联电量相同，总电压又不变。**

① 抓约束：$Q_1=Q_2=Q$，$U_1+U_2=U$ 恒定。

② 关键式子：$C=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ 增大，故 $Q=CU$ 增大。

③ 回推：$U_1=\dfrac{Q}{C_1}$，$C_1$ 不变而 $Q$ 增大 $\Rightarrow U_1$ 增大。

④ 得出：**增大；增大。**

## 2021 卷 · 真题 1 道

### 2021 · 选3　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

两个相同电容器 $C_1$、$C_2$ 串联后接电源，把电介质板插入 $C_1$，则（　）

(A) 总电容减小

(B) $C_1$ 上电荷大于 $C_2$

(C) $C_1$ 上电压高于 $C_2$

(D) 电容器组总能量增大

**一句话：串联接电源，插入介质后总能量一定增大。**

① 先抓两个前提：总电压 $U$ 不变，串联电荷 $Q$ 相同。

② 关键式子：$C=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ 增大，$W=\dfrac{1}{2}CU^2$。

③ 得出：$U$ 不变、$C$ 增大 $\Rightarrow W$ 增大，**答案 D**。

④ 注意：若充电后断开电源（$Q$ 不变），能量反而减小。

## 07 静电场综合练习

15 分钟 · 1 道

前面五讲讲完，用一道综合题把电势、导体、叠加串起来。

**例 7.1** 热身　同类题：两个球

两个半径分别为 $R_1$、$R_2$ 的导体球，相距很远，分别带电 $Q_1$、$Q_2$。用细导线把它们连接起来，求最后各自的电荷。

连接后是同一个导体 ⇒ **电势相等**：

$$\frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}=\frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

又电荷守恒：$Q_1'+Q_2'=Q_1+Q_2$。

解得 $Q_1'=\dfrac{R_1}{R_1+R_2}(Q_1+Q_2)$，$Q_2'=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}(Q_1+Q_2)$。

**结论：电荷按半径分配**。小球分到的少，但它的**面密度更大**（因为面积按 $R^2$）—— 这就是尖端放电的雏形。

## 08 磁场的基本规律：从奥斯特实验说起

40 分钟 · 三种载流体必须会

电和磁本来是两门学问，一根磁针把它们缝在一起了。

**一句话：**电流产生磁场，公式（毕奥-萨伐尔）和库仑定律结构相似，都是"源除以距离平方"。**三种载流体（直导线、圆环、螺线管）的结论要能直接写出来。**

? 1820 年，奥斯特在课堂上把一根通电导线放在小磁针旁边，磁针偏了。
**这一下把"电"和"磁"两门看似无关的学问连起来了。**之后安培、法拉第把它发展成完整的理论。

先讲清楚

### 一、磁场和电场的三个不同

| | 电场 | 磁场 |
|---|---|---|
| 来源 | 电荷 | **运动电荷（电流）** |
| 场线 | 从正电荷到负电荷，**有始有终** | **闭合的圈，无始无终** |
| 独门定律 | $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0$ | $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$（无磁单极） |

### 二、毕奥-萨伐尔定律

一段电流元 $I\,d\vec{l}$ 在空间某点产生的磁场：

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I\,d\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$

其中 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ T·m/A。

**结构和库仑定律一样**：源（$I\,dl$）除以距离平方。差别是它带着叉乘，**方向由右手定则决定**。

**用法和连续带电体完全一样**：取一段 → 写 $d\vec{B}$ → 看对称性 → 积分。

## 三、三种必考载流体

**① 无限长直导线（距它 $r$）**

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向：右手握导线，拇指指电流，四指绕的方向就是 $B$ 的方向（磁感线是同心圆）。

**② 圆环中心**

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

环上任一点到中心的距离都是 $R$，且 $d\vec{l}\perp\vec{r}$，所以直接积分。

**③ 无限长螺线管内部**

$$B=\mu_0 nI\quad（n=N/l\text{ 是单位长度匝数}）$$

外部 $B\approx0$（理想情况下严格为 0）。**内部是匀强场**，这是螺线管最有用的性质。

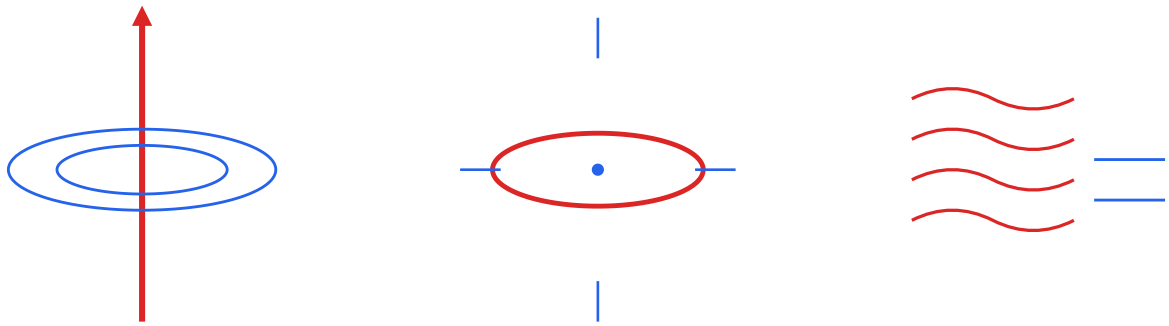



图 6：三种载流体的磁感线形状。注意直导线是同心圆，螺线管内部是均匀的平行线。

**停一下，回答我：**两根平行的长直导线，通同向电流。它们互相吸引还是排斥？

**吸引。**导线 1 在导线 2 的位置产生磁场，导线 2 的电流在这个场中受安培力。

用右手定则：1 在 2 处的场指向纸面内，2 的电流向上，$\vec{F}=I\vec{l}\times\vec{B}$ 指向 1 ⇒ 吸引。

**反向电流则相斥。**这个结论要记——选择题常考。

**必背 · 五条**

| | |
|---|---|
| $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ | 无限长直导线 |
| $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$ | 圆环中心 |
| $B=\mu_0 nI$ | 螺线管内，$n=N/l$ |
| $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ | T·m/A |
| $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ | 磁场无单极 |

**例 8.1** 基础　直导线

一根长直导线通 5 A 电流，求距它 2 cm 处的磁感应强度。

$$B=\frac{4\pi\times10^{-7}\times5}{2\pi\times0.02}=\frac{2\times10^{-7}\times5}{0.02}=5\times10^{-5}\ \text{T}$$

地磁场约 $5\times10^{-5}$ T，所以这个场和地磁同量级。

**例 8.2** 进阶　叠加

两个同心圆环，半径分别为 $R$ 和 $2R$，通同向电流 $I$，共面。求环心的磁感应强度。

内环：$B_1=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$；外环：$B_2=\dfrac{\mu_0 I}{2\cdot 2R}=\dfrac{\mu_0 I}{4R}$。

同向电流产生的场**同向**，所以相加：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}+\frac{\mu_0 I}{4R}=\frac{3\mu_0 I}{4R}$$

反向电流则相减。**磁场叠加是矢量叠加**，先判断方向再决定加减。

⚠ **三个坑：**

① **直导线公式的分母是 $2\pi r$，不是 $4\pi r^2$。**因为它是"无限长"，不是点。

② **螺线管公式里的 $n$ 是"单位长度匝数"**，不是总匝数 $N$。若题目给 $N$ 和 $l$，要除以 $l$。

③ **方向判断别搞混**：直导线用"右手握"，圆环用"右手螺旋"（四指顺电流，拇指指场）。

**自测 · 3 道**

1. 距离直导线变成原来的 4 倍，磁场变成多少?
2. 螺线管总匝数 1000、长 0.5 m、电流 2 A，内部磁场多少?
3. 两根平行导线通反向电流，互相吸引还是排斥?

**1.** $1/4$（$1/r$ 关系）。

**2.** $n$=2000 匝/m，$B=4\pi\times10^{-7}\times2000\times2\approx5\times10^{-3}$ T。

**3.** 排斥。

## 2023 卷 · 真题 1 道

**2023 · 算2** 10 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

半径 $R$ 的无限长半圆柱形金属薄片，沿轴线方向均匀通电流 $I$。求 (1) 轴线上任一点的磁感应强度；(2) 轴线上放一根反向电流 $I$ 的无限长直导线，求它单位长度受的安培力。

**一句话：把薄片拆成无数条无限长直导线。**

① 拆：每条 $dI=\dfrac{I}{\pi R}dl=\dfrac{I}{\pi}d\theta$（弧长是 $\pi R$）。

② 每条在轴线：$dB=\dfrac{\mu_0 dI}{2\pi R}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}d\theta$。

③ 对称性：垂直分量抵消，只剩 $dB\sin\theta$。

④ 关键式子：$B=\int_0^{\pi}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta\,d\theta=\dfrac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$ ⑤ 求力：$\dfrac{dF}{dl}=IB=\dfrac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}$，电流反向故为斥力。

⑥ 得出：$\boldsymbol{B=\dfrac{\mu_0 I}{\pi^2 R}}$；$\boldsymbol{\dfrac{dF}{dl}=\dfrac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}}$。

# 09 安培环路定理

35 分钟 · 选 5

它是磁场版的"高斯定理"：只看环路圈住了多少电流。

**一句话：**沿任意闭合路径绕一圈，$\vec{B}$ 的环流只由**穿过这个圈的电流之和**决定，与圈外的电流无关。

? 一根无限长直导线，磁感线是同心圆。
如果我沿着一个同心圆走一圈，$\vec{B}$ 处处和路径平行，大小还相等 —— **那么 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 不就是 $B\cdot 2\pi r$ 吗？**
而它等于 $\mu_0 I$。于是 $B=\mu_0 I/(2\pi r)$ —— **上一讲的公式自己出来了。**

先讲清楚

## 一、定理的内容

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 \Sigma I_{内}$$

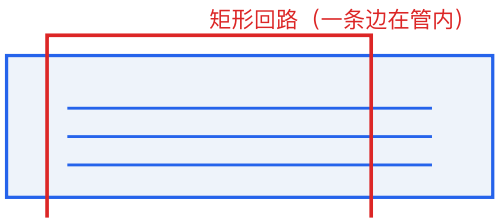
**电流的正负**由右手定则定：四指沿环路方向绕，拇指指向的电流取正，反向取负。

**圈外的电流完全不出现。**这一点和高斯定理里"面外电荷不算"是一模一样的逻辑。

## 二、什么时候能用它算出 $B$

和上一章一样，只有**对称性**才让积分退化成乘法。三种情况：

| 载流体 | 环路怎么取 | 结果 |
|---|---|---|
| 无限长直导线 | 同心圆 | $B\cdot 2\pi r=\mu_0 I \Rightarrow B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ |
| 无限长螺线管 | 矩形回路（一条边在管内） | $B\cdot l=\mu_0 nIl \Rightarrow B=\mu_0 nI$ |
| 螺绕环 | 环内同心圆 | $B\cdot 2\pi r=\mu_0 NI \Rightarrow B=\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ |




管外 B≈0，所以只有管内那一条边有贡献

图 7：螺线管的经典取法。管外磁场的贡献为零，所以 $Bl=\mu_0 nIl$。

## 三、分流电路的套路（选 5 就是这个）

当电流在导体里分成几路时，每一路都是一根"载流导线"。**环路套住哪几路，就只算那几路的电流。**

而各路的电流大小由**并联分流**决定：**电阻越大，分到的电流越小**（$I \propto 1/R$）。

对于圆环、铁环这类，**电阻正比于弧长**，所以：

$$I_1 : I_2 = L_2 : L_1$$（电流比 = 弧长反比）

**停一下，回答我：**一个圆环，电流从一点流入、从另一点流出，两段弧分别是 90° 和 270°。两段各分到多少电流?

弧长比 90:270=1:3，电阻比也是 1:3。

并联分流，电流与电阻成反比：

$$\text{短弧 } \frac{3}{4}I,\ \text{长弧 } \frac{1}{4}I$$

**必背 · 四条**

| | |
|---|---|
| $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I_{内}$ | 安培环路定理 |
| 只算环路**圈住**的电流 | 圈外不算 |
| 分流：$I \propto 1/R$ | 弧长越长电流越小 |
| $B = \mu_0 n I$ | 螺线管（用环路定理推的） |

**例 9.1** 稳态练习　同轴电缆的磁场

同轴电缆，内导体半径 $R_1$，外筒半径 $R_2$，电流 $I$ 内外反向。内导体中电流均匀分布。求三个区域的 $B$。

---

**$r<R_1$（内导体里）：**圈住的电流按面积比例 $\frac{r^2}{R_1^2}$：

$$B\cdot 2\pi r=\mu_0 I\frac{r^2}{R_1^2}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

**$R_1<r<R_2$（介质里）：**圈住全部内电流：$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

**$r>R_2$：**内外电流大小相等方向相反，净电流 0 $\Rightarrow B=0$

**这是同轴电缆"不泄漏磁场"的原理**，也是计算 2 的基础。

⚠ **三个坑：**

① **把圈外电流也算进去。**只算穿过的。

② **电流正负搞错。**用右手绕环路定正方向。

③ **导体内部分流忘了按面积。**均匀分布时是 $r^2/R^2$，不是 $r/R$。

**自测 · 3 道**

1. 环路不包围任何电流，$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 等于多少?
2. 螺线管外部的磁场为什么可以当作 0?
3. 同轴电缆外部的磁场为什么是 0?

**1.** 0（但环路各点的 B 不一定为 0）。

**2.** 用矩形环路：管外那条边的贡献为零，且管内外没有净电流穿过。

**3.** 圈住的内外电流大小相等、方向相反，净电流为零。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 选5　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

如图所示，两根直导线 $ab$ 和 $cd$ 沿半径方向被接到一个截面处处相等的均质铁环上，稳恒电流 $I$ 从 $a$ 端流入、从 $d$ 端流出，则磁感应强度 $\vec{B}$ 沿图中闭合路径 $L$ 的积分 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 等于（ ）。

A. $\mu_0 I$

B. $\frac{2}{3}\mu_0 I$

C. $-\mu_0 I$

D. $-\frac{2}{3}\mu_0 I$

（图：一个均质铁环，$a$、$d$ 两个接点把它分成短、长两段弧，短弧约占周长的三分之一；闭合路径 $L$ 从环孔穿过再绕到环外，与那段短弧链合一次；电流由 $a$ 分两路沿两段弧流向 $d$）

**一句话：先算电流怎么分，再数 $L$ 套住哪股电流。**

① 第一步：两段弧并联，截面相同，电阻与弧长成正比（短:长 = 1:2）。

② 于是短弧电流 $\frac{2}{3}I$，长弧电流 $\frac{1}{3}I$，方向相反。

③ 关键式子：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{内} = \frac{2}{3}\mu_0 I$

④ $L$ 只与短弧链合一次，长弧的 $\frac{1}{3}I$ 不算在内。

⑤ 得出：**答案 B**。

**注意**：严格算铁环有磁化电流，应先求 $H$ 再乘 $\mu$；本题选项按 $\mu_0$ 写。

## 2022 卷 · 真题 1 道

### 2022 · 算2　10 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

共轴长电缆由两个柱形导体（相对磁导率为 1）组成，内导体半径 $R_1$。外导体的内径为 $R_2$，外径为 $R_3$。两导体之间充满磁导率为 $\mu$ 的均匀磁介质，两导体内的电流 $I$ 等值反向，均匀分布在横截面上，求 (1) $R_2 < r < R_3$ 区域的磁感应强度大小；(2) $R_1 < r < R_2$ 区域的磁场能量密度。（图：共轴电缆示意图，内导体半径为 $R_1$，外导体内径 $R_2$、外径 $R_3$；内导体中电流 $I$ 向上，外导体中电流 $I$ 向下，两导体之间为磁介质）

**考安培环路定理处理"只包围一部分电流"的情形，再用 $w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$ 求磁能密度。**

由对称性，磁场线是以电缆轴线为圆心的同心圆。

取半径 $r$ 的圆形回路，则 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\cdot 2\pi r = \Sigma I_{内}$

(1) 在 $R_2 < r < R_3$（外导体内部），回路包围的是内导体的全部电流 $+I$，再减去外导体中半径小于 $r$ 的那部分回流。

外导体电流均匀分布，电流密度 $j = \dfrac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$，被包围的回流为 $\pi(r^2 - R_2^2)j$，于是

$$H\cdot 2\pi r = I - I\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = I\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \quad H = \frac{I}{2\pi r}\cdot\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

该区域是导体，相对磁导率为 1，故 $B = \mu_0 H$，即 $\boldsymbol{B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}}$

(2) 在 $R_1 < r < R_2$（两导体之间的磁介质中），回路只包围内导体的电流 $I$：$H\cdot 2\pi r = I$，得 $H = \dfrac{I}{2\pi r}$

磁能密度为 $\boldsymbol{w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \dfrac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}}$

注意：第 (1) 问所在区域是导体、$\mu_r = 1$，所以只能用 $\mu_0$，μ 只在两导体之间的介质层起作用；被包围的电流要减去外导体的那部分回流，符号别弄反；第 (2) 问求的是能量密度 $w_m$，不是总磁能，不要再去乘体积积分。

检验：$r = R_3$ 时 (1) 的 $B = 0$，与"外导体外表面处包围的净电流为零"一致。

## 10 磁介质与磁场力

40 分钟 · 选 4、选 6、填 3

这一讲分两半：材料怎么影响磁场，以及磁场怎么对电荷和电流施力。

> **一句话：$H$ 只看外电流，$B$ 是材料里的实际总磁场**；力的部分记住三个公式：洛伦兹力、安培力、磁力矩。

? 同一个螺线管，里面塞一根铁芯，磁场能强几百倍。
为什么？铁芯自己也被"磁化"了，产生了一份额外的磁场，加在一起。
所以我们需要两个量来区分"你灌进去的"和"实际得到的"。

先讲清楚

## 一、$H$ 和 $B$：两个量的分工

| | $H$（磁场强度） | $B$（磁感应强度） |
|---|---|---|
| 由谁决定 | **只由传导电流** | 传导电流 + **磁化电流** |
| 单位 | A/m | T（特斯拉） |
| 环流定理 | $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\Sigma I_{\text{自由}}$ | $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\Sigma I_{\text{总}}$ |
| 关系 | $B=\mu_0\mu_r H$ | |

**做题时用哪个？** 题目给"传导电流"、要求"真实磁场"，就先算 $H$（因为 $H$ 只认电流），再乘 $\mu_0\mu_r$ 得 $B$。

**螺线管**：$H=\dfrac{NI}{l}$，$B=\mu_0\mu_r\dfrac{NI}{l}$。

## 二、洛伦兹力：磁场对运动电荷

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}，\text{大小 } F=qvB\sin\theta$$

三个要点：

- **力垂直于速度和磁场**，所以它**永不做功**，只改变方向不改变速率；
- $\vec{v}\parallel\vec{B}$ 时不受力（不"切割"）；
- 电荷做圆周运动时，**洛伦兹力提供向心力**：$qvB=\dfrac{mv^2}{R}\Rightarrow R=\dfrac{mv}{qB}$。

## 三、安培力：磁场对电流

$$\vec{F}=I\vec{l}\times\vec{B}，\text{大小 } F=BIL\sin\theta$$

它其实就是洛伦兹力的"集体版"：导线里所有电子的受力加起来。

## 四、磁矩与磁力矩

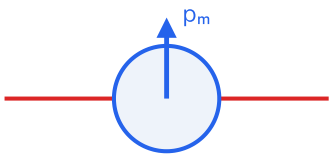
通电线圈相当于一个小磁针，用**磁矩**描述：

$$p_m=IS\text{（电流 × 面积），方向由右手螺旋定}$$

放在磁场里受**力矩**：

$M=p_mB\sin\theta$，最大 $M_{\max}=p_mB$

力矩的作用是**把线圈转到磁矩与磁场同向**（就像指南针转向南北）。




磁矩与 B 垂直
此时力矩最大

力矩想把 $p_m$ 转到与 B 同向

转到同向时 M = 0（稳定）

反向时 M = 0（不稳定）

和指南针一模一样

图 8：磁矩与磁场的夹角决定力矩大小。垂直时最大，同向时为零。

**停一下，回答我：**电子在磁场里做圆周运动，磁场不做功，那它的动能变不变？

**不变。**洛伦兹力永远垂直于速度，做功为零。速率不变，动能不变。

所以圆周运动的半径 $R=mv/(qB)$ 也保持不变。

**必背 · 七条**

| | |
|---|---|
| $B=\mu_0\mu_rH$ | 两个量的关系 |
| 螺线管 $H=\dfrac{NI}{l}$ | **不带 $\mu_0$** |
| $F=qvB\sin\theta$ | 洛伦兹力，不做功 |
| $R=\dfrac{mv}{qB}$ | 圆周半径 |
| $F=BIL\sin\theta$ | 安培力 |
| $p_m=IS$ | 磁矩 |
| $M_{\max}=p_mB$ | 最大磁力矩 |

⚠ **四个坑：**

① **$H$ 里塞 $\mu_0$。**$H=NI/l$，只有 $B$ 才乘 $\mu_0\mu_r$。

② **洛伦兹力当成会做功。**它垂直于速度，做功为零。
③ **圆周半径公式**：$R=mv/(qB)$，不是 $qB/(mv)$。
④ **磁矩公式**：$p_m=IS$，$S$ 是面积不是周长。

**自测 · 3 道**

1. 螺线管通同样电流，插铁芯后 $H$ 变不变？$B$ 呢？
2. 带电粒子沿磁感线方向飞入，轨迹是什么？
3. 磁矩与磁场平行时，力矩多大？

**1.** $H$ 不变（只认电流），$B$ 变大为 $\mu_r$ 倍。

**2.** 直线（$\sin\theta=0$，不受力）。

**3.** 0（$\sin 0=0$）。

## 2024 卷 · 真题 3 道

### 2024 · 选4　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

用细导线均匀密绕成长为 $l$、半径为 $a$（$l$ 远大于 $a$）、总匝数为 $N$ 的螺线管，管内充满相对磁导率为 $\mu_r$ 的各向同性均匀磁介质。若线圈中载有稳恒电流 $I$，则管中任意一点的（ ）。

A. 磁感应强度大小为 $B=\mu_0\mu_r NI$
B. 磁感应强度大小为 $B=\mu_r NI/l$
C. 磁场强度大小为 $H=\mu_0 NI/l$
D. 磁场强度大小为 $H=NI/l$

**一句话：$H$ 只看自由电流，$B=\mu H$ 才管介质。**

① 第一步：沿管轴取长 $l$ 的矩形环路，用 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\Sigma I_{自由}$。
② 关键式子：$Hl=NI$，即 $H=\dfrac{NI}{l}$
③ 再乘介质：$B=\mu_0\mu_r H=\dfrac{\mu_0\mu_r NI}{l}$。
④ 得出：**答案 D**（A、B 缺因子，C 把 $\mu_0$ 错塞进 $H$）。

## 2024 · 选6 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

一电子在垂直于均匀磁场方向的平面内做半径为 $R$ 的圆周运动，电子的速度为 $v$，则此圆轨道内所包含的磁通量为（ ）。

A. $\dfrac{\pi mv}{eR^2}$

B. $\dfrac{\pi v}{meR}$

C. $\dfrac{\pi mv}{e}R^2$

D. $\dfrac{\pi mvR}{e}$

**一句话：先由圆周运动反推 $B$，再乘圆面积。**

① 第一步：洛伦兹力当向心力，得 $B=\dfrac{mv}{eR}$（题目没给 $B$，要自己反推）。

② 关键式子：$\Phi=BS=\dfrac{mv}{eR}\pi R^2=\dfrac{\pi mvR}{e}$

③ 验量纲：$\dfrac{mvR}{e}$ 正是 T·m²。

④ 得出：**答案 D**。

## 2024 · 填3 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

在匀强磁场中有两个相距很远的平面线圈，其面积 $A_1=2A_2$，通有电流 $I_1=2I_2$，它们所受的最大磁力矩之比 $M_1/M_2=$ ____。

**一句话：磁矩 $m=IA$，最大力矩 $M=IAB$。**

① 第一步：$\vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}$，线圈平面与 $\vec{B}$ 平行时取最大 $M_{\max}=IAB$。

② 关键式子：$\dfrac{M_1}{M_2}=\dfrac{I_1A_1}{I_2A_2}=2\times2=4$

③ 得出：$M_1/M_2=4$（4:1）；"相距很远"即不必考虑互感。

## 2023 卷 · 真题 1 道

### 2023 · 选3　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

把轻的导线圈用线挂在磁铁 N 极附近，磁铁轴线穿过线圈中心且与线圈共面。线圈通以图示方向电流时，线圈将（　）

A、不转动，只离开

B、转动，同时靠近

C、转动，同时离开

D、不转动，只靠近

**一句话：磁矩与磁场的夹角决定转不转、吸不吸。**

① 看夹角：线圈平面与轴线共面，磁矩 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}$ 垂直。

② 关键式子：$\vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}\neq 0$，有力矩，必转动。

③ 转后 $\vec{m}$ 转向 $\vec{B}$，朝 N 极的一面成 S 极，异名相吸而靠近。

④ 得出：选 **B**。

注意：只有 $\vec{m}\parallel\vec{B}$ 时才"只靠近不转"。

## 2022 卷 · 真题 2 道

### 2022 · 选3 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

直径为 2.0cm 的线圈，匝数为 300，线圈内通过 10mA 的电流，同时放在 0.05T 的恒定磁场中，那么磁场作用于该线圈的最大力矩为（ ）N·m A、$4.7\times10^{-8}$

B、$4.7\times10^{-5}$

C、$4.7\times10^{-4}$

D、$4.7\times10^{-2}$

**考磁矩与磁力矩公式 $M = \mu B\sin\theta$，取 $\sin\theta = 1$ 即为最大力矩。**

先算磁矩。

半径 $r = 1.0\text{cm} = 1.0\times10^{-2}\text{m}$，面积 $S = \pi r^2 = 3.14\times10^{-4}\text{m}^2$，故

$\mu = NIS = 300\times10\times10^{-3}\times3.14\times10^{-4} \approx 9.4\times10^{-4}\text{A}\cdot\text{m}^2$

最大力矩 $M_{max} = \mu B = 9.4\times10^{-4}\times0.05 \approx 4.7\times10^{-5}\text{N}\cdot\text{m}$ 故选 **B**。

注意：题目给的是直径 2.0cm，要先折成半径 1.0cm 再平方；磁矩里必须乘匝数 N，漏掉 300 会算到 $10^{-7}$ 的量级。

### 2022 · 填3 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

一个无限长通电螺线管由表面绝缘的导线在铁棒上密绕而成，每厘米绕 10 匝。当导线中的电流 $I$ 为 2.0A 时，测得铁棒内的磁感应强度 $B$ 的大小为 1.0T，则可求得铁棒内的相对磁导率 $\mu_r$ 为____。（答案可以用含 $\mu_0$ 的式子表示）

**考有磁介质时的安培环路定理 $H = nI$ 与 $B = \mu_r\mu_0 H$ 的配合。**

先把匝数密度统一成国际单位：每厘米 10 匝即每米 1000 匝，$n = 1000\text{m}^{-1}$。

长直螺线管内部的磁场强度只由传导电流决定：$H = nI = 1000\times2.0 = 2000\text{A/m}$

再由 $B = \mu_r\mu_0 H$ 得 $\mu_r = \dfrac{B}{\mu_0 H} = \dfrac{1.0}{2000\mu_0} = \dfrac{1}{2000\mu_0}$ 即 $\boldsymbol{\mu_r = \dfrac{1}{2000\mu_0} \approx 398}$。

注意：$H$ 与铁棒无关，铁棒的作用是通过 $\mu_r$ 把 $B$ 放大；这里绝不能用 $B = \mu_0 nI$ 去算，那是真空螺线管的公式。

## 2021 卷 · 真题 1 道

### 2021 · 选5　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

电荷 $q$ 的粒子在均匀磁场中运动，下列说法正确的是（　）

(A) 速度大小相同，洛伦兹力就相同

(B) 速度不变，$q$ 变为 $-q$ 则力反向、大小不变

(C) 进入磁场后动能和动量都不变

(D) 洛伦兹力垂直于速度，轨迹必定是圆

**一句话：电荷变号只让力反向，大小不变。**

① 力同时依赖速度方向和电荷正负：$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$。

② 关键式子：$F=qvB\sin\theta$。

③ $q\to -q$ 使 $\vec{F}$ 反号而大小不变，**答案 B**。

④ 注意：动量是矢量会变；有平行分量时轨迹是螺旋线。

# 11 法拉第电磁感应定律与楞次定律

35 分钟 · 这一章的总开关

前面三章讲"电生磁"，这一章讲"磁生电"。

**一句话：**穿过回路的**磁通量变化**，会在回路里激起电动势。变化越快，电动势越大。

? 磁铁插进线圈，电流计偏转；停住不动，指针回零；拔出来，指针反向偏。
**关键不是"有没有磁场"，而是"磁场变没变"。**

先讲清楚

## 一、法拉第定律

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$$

若有 $N$ 匝：$\varepsilon=-N\frac{d\Phi}{dt}$。

**三件事要理解：**

- **只和"变化"有关。**磁通量再大，只要不变，就没有电动势；
- **负号是楞次定律**，表示"反抗变化"；
- **求大小就用绝对值**，方向另外判断 —— **做题时建议先算大小，再单独判方向。**

## 二、楞次定律：怎么判方向

四个字：**增反减同**。

| 原磁通在做什么 | 感应电流产生的磁场 |
| --- | --- |
| **增加** | 与原磁场**反向**（想抵消） |
| **减少** | 与原磁场**同向**（想维持） |

判出感应磁场方向后，用右手螺旋定则反推电流方向。

**更本质的说法：**感应电流总是"**阻碍相对运动**"。磁铁靠近就排斥，远离就吸引。**这条能秒判很多选择题。**

## 三、磁通量怎么算

$$\Phi = BS\cos\theta$$

$\theta$ 是**磁场与线圈法线**的夹角。所以：

- 线圈平面垂直于磁场 $\Rightarrow \theta=0 \Rightarrow \Phi$ 最大；
- 线圈平面平行于磁场 $\Rightarrow \theta=90^\circ \Rightarrow \Phi=0$。

> **最容易错的判断：**线圈转动时，**磁通最大的时刻，电动势为零**（因为此时 $\Phi$ 在峰值，$d\Phi/dt=0$）；**磁通为零的时刻，电动势最大**。
> 就像抛球：最高点速度为零，落地时速度最大。

## 四、感应电动势的两种来源

| 类型 | 原因 | 公式 |
| --- | --- | --- |
| **动生** | 导体动，切割磁感线 | $\varepsilon = \int (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$ |
| **感生** | 磁场变，激发涡旋电场 | $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ |

**两者的物理机制不同**：动生靠洛伦兹力，感生靠涡旋电场。但**法拉第定律统一描述它们**。

**停一下，回答我：**一个线圈在匀强磁场中匀速转动，转到什么位置时感应电动势最大？

**线圈平面平行于磁场时**（法线垂直于磁场）。此时磁通量为 0，但变化率最大。

这就是发电机的原理：电动势按正弦规律变化，磁通为零时电压最高。

**必背 · 五条**

| | |
|---|---|
| $\varepsilon=-N\frac{d\Phi}{dt}$ | 法拉第定律 |
| 增反减同 | 楞次定律 |
| 感应电流阻碍相对运动 | 更本质的说法 |
| $\Phi=BS\cos\theta$ | $\theta$ 是法线夹角 |
| 磁通最大 ⇒ 电动势为 0 | 反之亦然 |

**例 11.1** 基础 直接代公式

200 匝线圈，面积 0.01 m²，磁场在 0.2 s 内从 0.1 T 均匀增加到 0.5 T（磁场垂直于线圈平面）。求感应电动势大小。

$\Delta\Phi=\Delta B\cdot S=(0.5-0.1)\times0.01=4\times10^{-3}$ Wb

$$\varepsilon=N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=200\times\frac{4\times10^{-3}}{0.2}=4\text{ V}$$

方向：磁通在增加 ⇒ 感应磁场与原磁场反向 ⇒ 用右手定则反推电流。

⚠ **三个坑：**

① **以为"有磁场就有电动势"。**必须是磁通**变化**。

② **$\theta$ 用错。**$\Phi=BS\cos\theta$ 里的 $\theta$ 是**磁场与法线**的夹角，不是与线圈平面的夹角。

③ **匝数 $N$ 漏乘。**多匝线圈电动势是单匝的 $N$ 倍。

**自测 · 3 道**

1. 磁铁插在线圈里不动，线圈中有电流吗?
2. 线圈平面与磁场平行时，磁通是多少？电动势是多少（转动时）？
3. 磁铁靠近线圈时，线圈会被吸引还是排斥?

**1.** 没有（磁通不变）。

**2.** 磁通为 0，但电动势最大。

**3.** 排斥（阻碍相对运动）。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 填4　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

垂直纸面方向有均匀磁场 $\vec{B}$，一圆形导线圈绕轴 $OO'$ 以角速度 $\omega$ 做匀速转动，已知轴 $OO'$ 与 $\vec{B}$ 垂直。当线圈恰好位于纸面内时，线圈中感应电流的情况为 ____。（填"顺时针""逆时针"或"无感应电流"）

（图：纸面内画一竖直转轴 $OO'$，圆形线圈绕它转动，$\vec{B}$ 垂直于纸面，线圈平面可与纸面重合）

**一句话：线圈在纸面内时磁通量最大、电动势为零。**

① 第一步：此时线圈法线与 $\vec{B}$ 同向，$\Phi = BS$ 取极值。

② 关键式子：$\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt} = 0$

③ 得出：**无感应电流**。

**注意**：电动势最大在磁通为零（线圈平面与 $\vec{B}$ 平行）时，别记反。

## 2023 卷 · 真题 1 道

### 2023 · 算3　10 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

长直导线通 $I(t)=I_0e^{-\lambda t}$，矩形线框与它共面、相距 $a$，滑动边长 $b$ 且以 $v$ 匀速滑动。忽略自感，求任意时刻框内感应电动势。

**一句话：先写出 $\Phi(t)$，再整体求导。**

① 写磁场：距导线 $x$ 处 $B=\dfrac{\mu_0 I(t)}{2\pi x}$。

② $t$ 时刻面积：从 $a$ 到 $a+b$、高为 $vt$。

③ 积分：$\Phi(t)=\dfrac{\mu_0 I_0 v}{2\pi}\ln\dfrac{a+b}{a}\cdot te^{-\lambda t}$ ④ $t$ 出现两处，求导用乘积法则。

⑤ 得出：$\boldsymbol{\varepsilon_i=-\dfrac{\mu_0 I_0 v}{2\pi}\ln\dfrac{a+b}{a}e^{-\lambda t}(1-\lambda t)}$ ⑥ 注意：$t=\dfrac{1}{\lambda}$ 时为零，是两种效应抵消。

## 2022 卷 · 真题 2 道

### 2022 · 选4 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

将形状相同的铜环和木环静止放置，通过两环面的磁通量随时间的变化率相等，则（ ） A、铜环中有感应电动势，木环中无感应电动势

B、铜环中感应电动势大，木环中感应电动势小

C、铜环中感应电动势小，木环中感应电动势大

D、两环中感应电动势相等

**这题只考一句话：感应电动势由磁通量的变化率决定，与环的材料、电阻无关。**

法拉第电磁感应定律为 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 两环形状相同，穿过环面的磁通量变化率相等，所以感应电动势相等。

材料只影响感应电流，$I = \frac{\varepsilon}{R}$：铜环电阻很小，电流明显；木环几乎绝缘，几乎没有电流。

故选 **D**。

注意：木环中没有感应电流，但"感应电动势"依然存在，因为电动势是变化磁场的性质，不是电流的性质，这正是本题的陷阱。

**2022 · 算3** 10 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

一无限长直导线通有电流 $I = I_0 e^{-3t}$，一矩形线圈与其共面放置，其长边与导线平行。(1) 求矩形线圈中感应电动势的大小及感应电流的方向；(2) 若只有矩形线圈通过电流 $I = I_0 e^{-3t}$，长直导线中无电流，求长直导线中的感应电动势的大小。（图：长直导线竖直放置，电流 $I$ 向上；矩形线圈在导线右侧的同一平面内，与导线平行的边长（高）为 $l$，近边到导线距离为 $a$，远边到导线距离为 $b$）

**考法拉第电磁感应定律的完整流程：先求磁通量，再对时间求导，最后用楞次定律定方向。**

(1) 长直导线在距其 $x$ 处产生的磁场 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$，方向垂直纸面向里。

在距导线 $x$ 处取宽 $dx$、长 $l$ 的窄条，$dS = l\,dx$，则 $\Phi = \int_a^b \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x} l\,dx = \dfrac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a} = \dfrac{\mu_0 I_0 e^{-3t} l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

求导得感应电动势 $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{3\mu_0 I_0 e^{-3t} l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

方向判断：$I$ 随时间减小，穿过线圈向里的磁通量在减少，由楞次定律，感应电流要产生向里的磁场去"补充"它，故感应电流为顺时针方向。

(2) 此时宜用互感。

线圈通电流 $I$ 时在直导线处产生的磁场无法直接积分（导线自身所在处场发散），但互感系数满足 $M_{12} = M_{21}$，可由第 (1) 问的结果得到 $M = \dfrac{\Phi}{I} = \dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

于是直导线中的互感电动势为 $\varepsilon_{12} = -M\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{3\mu_0 I_0 e^{-3t} l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

**答案：(1) $\varepsilon_i = \dfrac{3\mu_0 I_0 e^{-3t} l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$，感应电流顺时针；(2) $\varepsilon = \dfrac{3\mu_0 I_0 e^{-3t} l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$（与 (1) 同大小）。**

注意：$-\dfrac{d\Phi}{dt}$ 中的负号只表示方向，问"大小"时要取绝对值；第 (2) 问不能对直导线所在处的磁场积分求磁通，必须借互感系数互易 $M_{12} = M_{21}$；两问结果相同正是互感互易性的体现。

## 12 动生电动势

40 分钟 · 计算 3

导体动起来，里面的自由电荷被推着跑。

> **一句话：**导体在磁场里运动，内部自由电荷受洛伦兹力被推到一端，两端出现电势差 —— 这就是动生电动势。

? 一根金属棒在磁场里跑，棒里的电子跟着跑。电子速度方向 = 棒的运动方向。
电子在磁场里运动，就受洛伦兹力 $q\vec{v}\times\vec{B}$，被推向一边。
**电子堆在一端，另一端缺电子 —— 电压就出来了。**

先讲清楚

## 一、最简单的模型：直棒垂直切割

棒长 $l$，速度 $v \perp B$，棒、速度、磁场三者互相垂直：

$$\varepsilon = Blv$$

**方向判断（右手定则）**：右手摊平，让磁感线穿入手心，拇指指运动方向，四指指**正电荷受力方向**（也就是电动势的高电势端）。

## 二、一般情况：积分

$$\varepsilon = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

把 $\vec{v} \times \vec{B}$ 看成"单位电荷受的力"，沿导线积分就是电动势。

**注意点积**：只有沿导线方向的分量有贡献。**垂直于导线的分量不做功。**

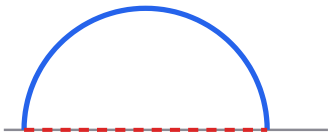
## 三、最省力的捷径：形状无关

**在匀强磁场中整体平移的导体，两端电动势只由首尾两点决定，与形状无关。**

为什么？把这段导体和它的首尾连线补成一个闭合回路。回路整体平移，**磁通量不变**（面积和朝向都不变），所以回路总电动势为零：

$$\varepsilon_{曲} + \varepsilon_{直} = 0 \Rightarrow \text{两者大小相等、方向相反}$$

**于是弯的可以换成直的来算，一整个积分就省了。**计算 3 就靠这一条。



补成闭合回路

整体平移 ⇒ 磁通不变

⇒ 总电动势 = 0

⇒ 弧段 = 直线段

弯的换直的，积分变乘法

图 9：形状无关性的来源 —— 闭合回路平移时磁通不变。

**停一下，回答我：**一根棒沿磁感线方向平移，有电动势吗？

**没有。**$\vec{v} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow$ 电子不受力。

所以"切割"两个字很重要：**必须割断磁感线才有电动势。**

**必背 · 四条**

| | |
|---|---|
| $\varepsilon = Blv$ | 垂直切割 |
| $\varepsilon = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ | 通用式 |
| 平移导体：形状无关 | 弯的当直的算 |
| 右手定则判方向 | 磁感线穿掌心，拇指指运动 |

**例 12.1** 基础　导轨上的棒

两根平行导轨间距 0.5 m，磁场 0.8 T 垂直穿过导轨平面。一根金属棒以 2 m/s 沿导轨滑动。求电动势；若回路总电阻 0.4 Ω，求电流和电功率。

$\varepsilon = Blv = 0.8 \times 0.5 \times 2 = 0.8$ V

$I = \varepsilon / R = 0.8 / 0.4 = 2$ A

$P = I^2 R = 4 \times 0.4 = 1.6$ W（也等于 $Fv$，因为要维持匀速必须外力做功）

⚠ **三个坑：**

① **$\varepsilon = Blv$ 要求三者互相垂直。**不垂直时要乘 $\sin\theta$。

② **形状无关只对"整体平移"成立。**如果导体在转动（比如转动的棒），不能直接用。

③ **电动势和电势差不是一回事。**回路断开时，端电压才等于电动势；有电流时 $U = \varepsilon - Ir$。

**自测 · 3 道**

1. 棒垂直于磁场运动，速度翻倍，电动势怎么变？
2. 一根弯成 U 形的导线在匀强磁场中平移，两端电动势与用直线连接时相同吗？
3. 电流在回路中流动，磁场的洛伦兹力对电子做功吗？

**1.** 翻倍（$\varepsilon=Blv$）。

**2.** 相同（形状无关）。

**3.** 对一个电子不做功，但宏观上安培力做功 —— **因为电子有沿导线的漂移速度，合速度不垂直于 B。**

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 算3　10 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

一条导线弯成半径为 $R$ 的半圆弧 $acb$，放在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，$\vec{B}$ 与半圆弧所在平面垂直并向内，如图所示。当导线以速度 $v$（$v$ 与 $\vec{B}$ 垂直，并与 $ab$ 方向成 α 角，其中 0<α<$\pi$）运动时，试求：

(1) 这段导线中的感应电动势 $\varepsilon_{bca}$；

(2) 令导线两端 $b$、$a$ 的电势差为 $U_{ba}$，$b$ 端与中点 $c$ 的电势差为 $U_{bc}$，则对于 0<α<$\pi$，是否存在一角度 α 使得 $U_{ba}=U_{bc}$？若存在求出 α，若不存在请说明理由。

（图：半圆弧 $acb$ 以弦 $ab$ 为直径，$c$ 为弧的中点，$\vec{B}$ 垂直纸面向里，速度 $\vec{v}$ 在纸面内与 $ab$ 成 α 角）

**一句话：弯导线换成弦来算，电动势只认两端点。**

① 第一步：弧与弦成闭合回路平移，$\Phi$ 不变，即弧上电动势等于弦 $ba$ 上电动势，$\varepsilon_{bca}=\varepsilon_{ba}$，等效长度 $|ab|=2R$。

② 第二步：$\vec{v}\times\vec{B}$ 与弦 $ba$ 夹角的余弦为 sin α：

③ 关键式子：$\varepsilon_{bca}=vB\cdot 2R\sin\alpha=2vBR\sin\alpha$

④ 同法用弦 $bc$（$|bc|=\sqrt{2}R$，与 $ab$ 成 45°）得 $\varepsilon_{bc}=vBR(\sin\alpha+\cos\alpha)$。

⑤ 第三步：导线内 $\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}=0$，故 $U_{ba}=-\varepsilon_{bca}$、$U_{bc}=-\varepsilon_{bc}$，条件化为 $\varepsilon_{bca}=\varepsilon_{bc}$。

⑥ 约去 $vBR$：$2\sin\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha$，即 $\tan\alpha=1$。

⑦ 得出：**存在，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$（即 45°）**，此时 $U_{ba}=U_{bc}=-\sqrt{2}vBR$。

## 2022 卷 · 真题 1 道

### 2022 · 填4　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

如图，长为 $L$ 的导体棒 AB 在均匀磁场 $B$ 中绕通过 C 点的垂直于棒长且沿磁场方向的轴 $OO'$ 转动（角速度 $\vec{\omega}$ 与 $\vec{B}$ 同方向），BC 的长度为棒长的 $1/3$。则点 A 与点 B 之间的电势差 $U_{AB}$ 是____。（图：导体棒 AB 水平放置，A 在左端、B 在右端；竖直虚线 $OO'$ 为转轴，过棒上 C 点且靠近 B 端，$BC = L/3$、$AC = 2L/3$；$\vec{B}$ 竖直向上，与 $\vec{\omega}$ 同向）

**考转动导体的动生电动势：棒上各点的速度不同，必须取线元积分。**

距轴为 $x$ 的线元速度为 $v = \omega x$，其动生电动势为 $d\varepsilon = Bvdx = B\omega x\,dx$ 从轴积到端点得 $\varepsilon = \frac{1}{2}B\omega x^2$，方向沿 $\vec{v}\times\vec{B}$，即从轴指向棒的端点。

C 点两侧的电动势都指向各自的端点，所以 A、B 两端的电势都比 C 高：

$V_A - V_C = \frac{1}{2}B\omega(\frac{2L}{3})^2 = \frac{2}{9}B\omega L^2$，$V_B - V_C = \frac{1}{2}B\omega(\frac{L}{3})^2 = \frac{1}{18}B\omega L^2$

于是 $U_{AB} = V_A - V_B = \frac{2}{9}B\omega L^2 - \frac{1}{18}B\omega L^2 = \frac{1}{6}B\omega L^2$ **故 $U_{AB} = \frac{1}{6}B\omega L^2$，且 A 点电势高。**

注意：不能直接套 $\frac{1}{2}B\omega L^2$（那是绕一端点转动的结果）；转轴两侧的电动势方向相反，必须分段算再相减，并且 $U_{AB} = V_A - V_B$，符号要说清。

## 13 感生电动势与涡旋电场

30 分钟 · 选 7

这次导体不动，是磁场自己变了。

**一句话：变化的磁场会在空间里激发出闭合的电场（涡旋电场）**，这个电场不需要导体，真空里也有。它沿导线的积分就是感生电动势。

? 导体不动、磁场也不动，没有电流，这好理解。
但导体不动、**磁场在变**，回路里居然有电流 —— 是什么推动电荷的?
**麦克斯韦的答案：变化磁场自己产生了一个电场。**

先讲清楚

### 一、涡旋电场的两个特点

① **它是闭合的（涡旋）。**场线是一圈圈的闭合曲线，**没有起点和终点。**

所以它的环路积分**不为零**：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$$

**② 因此它不能定义电势。**静电场环路积分为零，可以定义电势；涡旋电场不行 —— **绕一圈回来，电势居然变了。**

这是本书一个重要的分界：**静电场有电势，涡旋电场没有。**

## 二、感生电场的大小（螺线管情形）

半径 $R$ 的长螺线管，内部磁场以 $dB/dt$ 变化。管外距轴 $r$ 处（$r>R$）：

取半径 $r$ 的圆形环路：

$$E\cdot 2\pi r = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

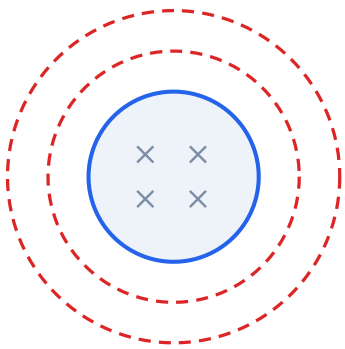
**注意：管外 $B=0$，但 $E\neq 0$。**这就是选 7 的核心。

## 三、选 7 的关键区分

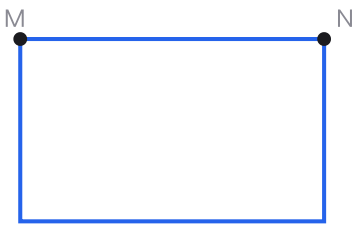
很多同学会把两件事混在一起：

| 问题 | 看什么 |
| --- | --- |
| 某一段导线有无**电动势** | **该处有没有涡旋电场**（管外也有） |
| 整个回路有无**电流** | **回路磁通量变不变**（管外框的磁通恒为 0） |

所以完全可能出现：**每段导线都有电动势，但回路总电动势为零、没有电流。**



管内 B 在变




框在管外：磁通恒为 0

但框上每段都泡在涡旋电场里

图 10：管外没有磁场，但有涡旋电场。**电动势看电场，电流看磁通。**

**停一下，回答我：**把一块金属板放进正在变化的磁场里，板里会有电流吗？

会有，叫**涡流**。涡旋电场在金属板内部推动电荷形成一圈圈的电流。

它有害也有用：变压器铁芯要叠片来减小涡流损耗；电磁炉则故意利用涡流发热。

**必背 · 四条**

| | |
|---|---|
| $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\dfrac{d\Phi}{dt}$ | 涡旋电场的环流 |
| 涡旋电场无电势 | 环路积分不为 0 |
| 管外 $B=0$ 但 $E\neq 0$ | 选 7 的关键 |
| 电动势看电场，电流看磁通 | 两件事 |

**例 13.1** 计算涡旋电场　管外场强

半径 5 cm 的长螺线管，内部磁场以 0.02 T/s 增加。求距轴线 10 cm 处的涡旋电场大小。

管外（$r>R$）：$E\cdot 2\pi r=\pi R^2\dfrac{dB}{dt}$

$$E=\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}=\frac{0.05^2}{2\times 0.1}\times 0.02=2.5\times 10^{-4}\ \text{V/m}$$

方向：沿以轴为中心的圆（用楞次定律定绕向）。

⚠ **三个坑：**

① **以为管外没有磁场就没有电场。**错，涡旋电场可以延伸到管外。

② **把涡旋电场的环路积分当成零。**它等于 $-d\Phi/dt$，一般不为零。

③ **混淆"电动势"与"电势差"。**涡旋电场下不存在电势差，只能说"电动势"。

**自测 · 3 道**

1. 涡旋电场的场线是什么样的?
2. 为什么涡旋电场不能定义电势?
3. 一块金属板放在变化磁场里会发热，为什么?

**1.** 闭合的圈（涡旋）。

**2.** 绕一圈做的功不为零，电势会"绕回来不相等"，定义不成立。

**3.** 涡流在金属里流动，电阻发热（涡流损耗）。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 选7　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

如图所示为一无限长直螺线管的截面图，管内有以恒定速率增加的均匀磁场 $\vec{B}$，管外有一矩形导线框，其所在平面与螺线管轴线垂直，导线框的一边 $MN$ 接有电流表 $G$。导线 $MN$ 中是否有感应电动势？电流表 $G$ 中是否有电流通过？（ ）

A. $MN$ 中有感应电动势，电流表 $G$ 中有电流

B. $MN$ 中有感应电动势，电流表 $G$ 中没有电流

C. $MN$ 中没有感应电动势，电流表 $G$ 中有电流

D. $MN$ 中没有感应电动势，电流表 $G$ 中也没有电流

（图：圆形螺线管截面内画出均匀磁场，管外一侧放一矩形线框，线框的一边 $MN$ 串接电流表 $G$，整个线框都在管外、不包围螺线管）

**一句话：管外没有 $B$，却有涡旋电场。**

① 第一步：管外 $\vec{B}=0$，但 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 不为零，会在管外激起涡旋电场。

② $MN$ 处在涡旋电场中，$\int_{MN}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 不为零，故 $MN$ 中有电动势。

③ 关键式子：$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=0$（线框不包围管，$\Phi$ 恒为零）

④ 回路总电动势为零，所以 $G$ 中无电流。

⑤ 得出：**答案 B**。

## 2023 卷 · 真题 2 道

### 2023 · 选4 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

平板空气电容器两极板是半径 $r$ 的圆板，充电时板间 $\frac{dE}{dt}$，忽略边缘效应，则板间位移电流为（ ）

A、$\frac{r^2}{4\varepsilon_0}\frac{dE}{dt}$

B、$\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$

C、$2\pi r\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$

D、$\varepsilon_0\pi r^2\frac{dE}{dt}$

**一句话：位移电流 = 电位移通量的变化率。**

① 写板间电位移：$D=\varepsilon_0 E$，通量穿过整个极板面。

② 关键式子：$I_d=\frac{d}{dt}(\varepsilon_0 E\cdot\pi r^2)=\varepsilon_0\pi r^2\frac{dE}{dt}$ ③ 得出：选 **D**。

注意：面积用 $\pi r^2$，不是侧面积。

### 2023 · 填4 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

圆形区域内均匀磁场 $\frac{dB}{dt}>0$，边长 $d$ 的正方形线框 $abcd$ 置于其中，轴线过 $ab$ 中点 $O$。则 $\varepsilon_{oc}=$ _____，$\varepsilon_{dc}=$ _____，$\varepsilon_{abdca}=$ _____。

**一句话：涡旋电场，电动势 = 扫过面积 × $\boldsymbol{\frac{dB}{dt}}$。**

① 看场：同心圆电场线，$E=\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$，径向无场。

② 关键式子：$\varepsilon=\frac{dB}{dt}\times$(扫过面积) ③ $\varepsilon_{oc}$：补半径 $Ob$,$Oc$，三角形面积 $\frac{d^2}{4}$。

④ $\varepsilon_{dc}$：三角形 $Odc$ 面积 $\frac{d^2}{2}$。

⑤ 整个回路面积 $d^2$ ⇒ 答案 $\boldsymbol{\frac{1}{4}\frac{dB}{dt}d^2}$；$\boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}d^2}$；$\boldsymbol{\frac{dB}{dt}d^2}$。

## 2022 卷 · 真题 2 道

### 2022 · 选5 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

如图，平板电容器（忽略边缘效应）充电时，沿环路 $L_1$、$L_2$ 磁场强度 $\vec{H}$ 的环流中，必有（ ） A、$\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} > \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

B、$\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

C、$\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} < \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

D、$\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$ （图：电源、导线与平板电容器串联成回路；$L_1$ 是置于电容器两极板之间的小环路，$L_2$ 是套在右侧导线外的环路）

**考安培环路定理的推广形式，即传导电流与位移电流共同产生磁场：$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c + I_d$**

**$L_1$ 位于电容器两极板之间，没有传导电流穿过它，穿过的只有位移电流；而 $L_1$ 只套住板间位移电流的一部分（整块板的位移电流才是充电电流 $I$），所以 $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} = I_d < I$。**

$L_2$ 套住的是导线，穿过它的传导电流就是充电电流 $I$，故 $\oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l} = I$。

因此 $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} < \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$，选 **C**。

注意：位移电流与传导电流在"激发磁场"上等效，但等效的是整个板间区域总的位移电流 $I$；小环路只包围了一部分，不要因为 $I_d = I$ 就误判两者相等。

**2022 · 填5** 3 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

在圆柱形区域内有一均匀磁场 $\vec{B}$，且 $\frac{dB}{dt} > 0$。一边长为 $l$ 的正方形金属框置于磁场中，位置如图所示，框平面与圆柱形轴线垂直，且轴线通过金属框 ab 的中点 O，则电动势大小 $\varepsilon_{ab}$ = ____；$\varepsilon_{dc}$ = ____；$\varepsilon_{abdca}$ = ____。（图：圆形磁场区域内 $\vec{B}$ 垂直纸面向里；正方形线框 abcd 位于圆内偏右，a、b 是左边上下两端，c、d 是右边上下两端，ab 的中点 O 与圆柱轴线重合，四边边长均为 $l$）

**考感生电动势（涡旋电场）。**

由 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 可知，涡旋电场线是以轴线 O 为圆心的同心圆，场强 $E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$，方向处处与半径垂直。

ab 边沿过 O 的一条直线（直径方向），其上各点 $\vec{E}$ 都与 ab 垂直，故 $\varepsilon_{ab} = 0$。

再看 dc 边：取回路 O→d→c→O，Od、Oc 都沿半径方向，$\vec{E}$ 与它们垂直，这两段不贡献电动势；回路包围的面积是三角形 $S = \frac{1}{2}l\cdot l = \frac{l^2}{2}$，故 $\varepsilon_{dc} = \frac{dB}{dt}\cdot\frac{l^2}{2}$。

整个金属框包围面积 $l^2$，所以 $\varepsilon_{abdca} = \frac{dB}{dt}l^2$。

**答案：0；$\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}l^2$；$\frac{dB}{dt}l^2$。**

由楞次定律，$\vec{B}$ 向里且增大，感应电动势沿逆时针方向 a→b→d→c→a。

注意：不能把 cd 边上各点的场强当成常量直接乘长度（各点到轴的距离不同），用"回路包围的面积"最稳妥；$\varepsilon_{ab} = 0$ 是因为 $\vec{E}$ 与 ab 垂直，而不是因为那里没有电场。

14 # 自感、互感与磁能

40 分钟 · 计算 2

磁场里存着能量，而且可以用两种方法算出来。

**一句话：线圈的电流变化会"自己感应自己"（自感）；建立磁场要储存能量，总磁能 $\frac{1}{2}LI^2$，能量密度 $\frac{1}{2}BH$。**

? 给线圈通电，电流从 0 涨到 $I$。但自感一直在"反抗"电流增加，所以电源必须"多出力"。
**这份多出的功去哪了？—— 存在磁场里。**

先讲清楚

## 一、自感系数

$$\Phi=LI,\quad \varepsilon_L=-L\frac{dI}{dt}$$

$L$ 叫自感系数，单位亨利（H）。**它只由线圈的几何形状和介质决定**，与电流无关（和电容一样）。

长直螺线管：$L=\mu_0 n^2 V=\mu_0 n^2 lS$。

## 二、互感（了解）

两个线圈靠得近，一个的电流变化会在另一个里产生电动势：

$$\varepsilon_2=-M\frac{dI_1}{dt}$$

这就是变压器的原理。**本节考试只涉及自感，互感知道概念即可。**

## 三、磁能

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2$$

写成能量密度（单位体积）：

$$w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{B^2}{2\mu}$$

## 四、两条求 $L$ 的路

| 已知条件 | 做法 |
| --- | --- |
| 知道几何（螺线管等） | 直接用 $L=\mu_0 n^2 V$ |
| **给的是电流分布、要求 $L$** | $H\to w_m\to$ 积分得 $W\to L=\dfrac{2W}{I^2}$ |

**计算 2 就是走第二条路。**

> **为什么 $W=\frac{1}{2}LI^2$ 里有 $\frac{1}{2}$？** 电流是从 0 慢慢升到 $I$ 的，平均电流是 $I/2$，所以 $W=\Phi\cdot\frac{I}{2}=\frac{1}{2}LI^2$。**和电容储能 $\frac{1}{2}CU^2$ 完全对称。**

**停一下，回答我：**断开一个自感很大的线圈的电路时，为什么开关处会打火花？

因为电流想瞬间变 0，$dI/dt$ 极大，自感电动势 $\varepsilon=-L\,dI/dt$ 也变得极大，足以击穿空气。

这就是"**阻碍变化**"在极端情况下的表现。

**必背 · 五条**

| | |
|---|---|
| $\Phi=LI$ | 自感定义 |
| $\varepsilon_L=-L\dfrac{dI}{dt}$ | 自感电动势 |
| $W_m=\dfrac{1}{2}LI^2$ | 总磁能 |
| $w_m=\dfrac{1}{2}BH=\dfrac{B^2}{2\mu}$ | 能量密度 |
| $L=\dfrac{2W}{I^2}$ | 由能量反求 |

**例 14.1** 基础　螺线管自感

长 0.5 m、截面积 $10^{-3}$ m²、总匝数 1000 的长直螺线管（空心）。求自感。

$n=N/l=2000$ 匝/m，体积 $V=lS=5\times10^{-4}$ m³。

$L=\mu_0 n^2 V=4\pi\times10^{-7}\times4\times10^{6}\times5\times10^{-4}\approx2.5\times10^{-3}$ H

⚠ **三个坑：**

① **能量公式忘了 $\dfrac{1}{2}$。**

② **能量密度用的 $\mu$ 与区对应。**内导体用 $\mu_0$，介质用 $\mu$，别搞混。

③ **积分体积元写错。**柱坐标是 $dV=2\pi r\,l\,dr$（不是 $4\pi r^2$）。

**自测 · 3 道**

1. 自感 0.5 H 的线圈通 4 A，储能多少?
2. 螺线管匝数翻倍（长度不变），自感变几倍?
3. 为什么断电路时线圈会产生高压?

**1.** $W=\frac{1}{2}\times 0.5\times 16=4$ J。

**2.** $n$ 翻倍 $\Rightarrow L\propto n^2\Rightarrow$ 4 倍。

**3.** $dI/dt$ 极大 $\Rightarrow \varepsilon=-L\,dI/dt$ 极大。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 算2　10 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

一段长度为 $l$ 的同轴电缆，内部是半径为 $R_1$ 的实心轴心导体（磁导率 $\mu_0$），其截面均匀分布着电流；外筒半径为 $R_2$，有相反方向的电流，如图所示。轴心导体与外筒的电流强度均为 $I$。已知轴心导体与外筒之间充满磁导率为 $\mu$ 的各向同性均匀磁介质，且 $l$ 远大于 $R_1$、$R_2$。试求：

(1) 这段同轴电缆的磁能；

(2) 这段电缆的自感系数 $L$。

（图：同轴电缆，内导体半径 $R_1$、电流在其截面上均匀分布，外筒半径 $R_2$ 载反向电流 $I$，两者之间为磁导率为 $\mu$ 的介质）

**一句话：分三段求 $H$，积 $w_m$ 得 $W_m$，再反求 $L$。**

① 第一步：$r<R_1$ 时电流均匀分布，套住 $I\frac{r^2}{R_1^2}$，得 $H=\frac{Ir}{2\pi R_1^2}$。

② $R_1<r<R_2$：$H=\frac{I}{2\pi r}$；$r>R_2$：内外电流抵消，$H=0$。

③ 关键式子：$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$，体积元 $dV=2\pi r\,l\,dr$

④ 两段积分得 $W_m=\frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}+\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$。

⑤ 再由 $W_m=\frac{1}{2}LI^2$ 得 $L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{\mu_0 l}{8\pi}+\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$。

⑥ 得出：$\boldsymbol{W_m=\frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}+\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}}$，$\boldsymbol{L=\frac{\mu_0 l}{8\pi}+\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}}$。

**注意**：内导体那一段储能来自"电流在截面均匀分布"；外筒按薄壁处理才有 $r>R_2$ 时 $H=0$。

## 2023 卷 · 真题 2 道

### 2023 · 选5 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

无限长直导线截面各处电流密度相等，总电流 $I$，则每单位长度导线内贮藏的磁场能量为（ ）

A、$\mu_0 I^2/(4\pi)$

B、$\mu_0 I^2/(16\pi)$

C、$\mu_0 I^2/(8\pi^2)$

D、$\mu_0 I^2/(8\pi)$

**一句话：先求导线内 $B(r)$，再积分磁能密度。**

① 内部磁场：半径 $r$ 的环路内电流为 $I\dfrac{r^2}{R^2}$。

② 关键式子：$B=\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$，$W=\int_0^R \dfrac{B^2}{2\mu_0}2\pi r\,dr$ ③ 积分得 $W=\dfrac{\mu_0 I^2}{16\pi}$，选 **B**。

④ 注意：上限只到 $R$，问的是导线内。

### 2023 · 填5 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

边长 $a$ 的正方形线圈从均匀磁场区域上方由静止下落，磁场 $B$、自感 $L$、质量 $m$、电阻可忽略。进入磁场前速率 $v(t)=$ _____。

**一句话：自感与重力联手，解出简谐振动。**

① 回路方程（$R=0$）：$Bav-L\dfrac{di}{dt}=0$。

② 牛顿第二定律：$m\dfrac{dv}{dt}=mg-Bia$。

③ 关键式子：$\dfrac{d^2v}{dt^2}=-\dfrac{B^2a^2}{mL}v$，角频率 $\omega=\dfrac{Ba}{\sqrt{mL}}$。

④ 用 $v(0)=0$、dot $v(0)=g$ 定系数：$v=\dfrac{g}{\omega}\sin\omega t$。

⑤ 得出：$\boldsymbol{v=\dfrac{\sqrt{Lm}}{Ba}g\sin\left(\dfrac{Bat}{\sqrt{Lm}}\right)}$。

## 2021 卷 · 真题 1 道

### 2021 · 选6　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

自感分别为 $L_1$、$L_2$ 的两线圈，互感系数 $M$，顺接串联时等效自感为（　）

(A) $L_1+L_2$

(B) $L_1+L_2+M$

(C) $L_1+L_2+2M$

(D) $L_1+L_2-2M$

**一句话：顺接串联磁通互相加强，互感项取正号。**

① 先判断两线圈磁通是加强还是削弱。

② 关键式子：$\Phi_1=L_1I+MI$，$\Phi_2=L_2I+MI$。

③ 相加得 $\Phi=(L_1+L_2+2M)I$，**答案 C**。

④ 注意：反接时为 $L_1+L_2-2M$。

## 15 狭义相对论（上）：两条假设与三个效应

40 分钟 · 先把"反直觉"讲通

这一节不难算，难在"接受"。先把观念打通，公式自然就顺了。

**一句话：**光速对谁都一样，这一条假设就把"绝对时间"推翻了 —— 同时性是相对的，运动的钟变慢、尺变短。

? 你站在地面，朋友在匀速前进的火车上。他打开手电筒。
他说光速是 $c$，你说光速也是 $c$ —— **尽管火车在往前跑。**
这件事如果成立，时间和空间就必须"变形"来配合它。

先讲清楚

### 一、两条基本假设

① **相对性原理**：所有惯性系里，物理定律形式相同。你在匀速的船里做实验，无法判断船是动还是静。

② **光速不变原理**：真空中的光速 $c$ 在任何惯性系里都一样，与光源的运动无关。

第二条是"革命性"的。因为按伽利略变换，你追光跑，光速应该变小 —— 但实验（迈克耳孙-莫雷）说：**不变**。

### 二、同时性的相对性

想象一节车厢正中间有一个闪光灯，同时向两端发光。

**车上的人看：**两端同时收到光（距离相等、光速相等）。

**地面上的人看：**车在往前跑，**车尾"迎着"光跑过来**，车头"逃开"光。所以**车尾先收到光**。

**结论：车上的"同时"，在地上看来并不同时。**这就是同时性的相对性。



车上：同时到达两端　　地上：尾部先收到

图 11：同一个"同时"，在两个参考系里不一样。这就是时间不再是绝对的根本原因。

## 三、洛伦兹因子

所有相对论公式里都有这一个量：

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\geq 1$$

常用值：$v=0.6c \Rightarrow \gamma=1.25$；$v=0.8c \Rightarrow \gamma=5/3$；$v=0.9c \Rightarrow \gamma\approx 2.29$。

## 四、时间膨胀

$$\Delta t=\gamma\Delta t_0$$

$\Delta t_0$ 是**和事件一起运动的钟**量出的时间（叫固有时间），它**最短**。

换句话说：**运动的钟走得慢。**

经典例子：$\mu$ 子寿命 2 μs，但它以 0.99c 飞行时，地面看它活得久得多，所以能到达地面。

## 五、长度收缩

$$L=\frac{L_0}{\gamma}$$

$L_0$ 是**和物体一起运动的人**量出的长度（固有长度），它**最长**。

**只在运动方向上收缩**，垂直方向不变。

> **怎么记"谁乘谁除"？**记住一句话：**固有量（带下标 0）总是"最长"的那个**——固有时间最短，固有长度最长。

> 所以：时间要变长（乘 $\gamma$），长度要变短（除 $\gamma$）。

**停一下，回答我：**一列火车以 0.6c 通过站台，站台上的人量到火车长 80 m。火车上的人量自己多长？

地面上量到的是**收缩后**的长度 $L=80$ m。

固有长度 $L_0=\gamma L=1.25\times80=100$ m。

**注意：车上的人量自己的车，永远量到固有长度（最长）。**

**必背 · 五条**

| | |
|---|---|
| $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ | 一切的基础 |
| $\Delta t=\gamma\Delta t_0$ | 动钟变慢 |
| $L=L_0/\gamma$ | 动尺变短（仅运动方向） |
| 同时性是相对的 | 光速不变的直接后果 |
| 固有时间最短，固有长度最长 | 判断题口诀 |

**例 15.1** 基础 时间膨胀

飞船以 0.8c 飞行，船上的钟走了 1 年。地面上过了多久？

$\gamma=1/\sqrt{1-0.64}=1/0.6=5/3$

船上的 1 年是固有时间：$\Delta t=\gamma\Delta t_0=\dfrac{5}{3}\times1\approx1.67$ 年。

**例 15.2** 进阶　长度收缩的方向性

边长为 $a$ 的正方形，以 $v=0.6c$ 沿一条边方向运动。地面观察者看到它是什么形状？面积多少？

---

**运动方向**的边长收缩：$a'=a/\gamma=0.8a$。
**垂直方向**不变：还是 $a$。

所以变成**长方形**，$0.8a\times a$，面积 $0.8a^2$。

**注意：垂直方向绝不收缩。**这是最常见的错。

⚠ **三个坑：**

① **把 $\gamma$ 用反。**时间乘、长度除。

② **以为垂直方向也收缩。**只有运动方向。

③ **搞不清"谁的固有量"。**跟着物体一起走的那个参考系量出来的才是固有量。

**自测 · 3 道**

1. $v=0.6c$ 时 $\gamma$ 是多少？
2. 飞船上的 1 小时，地面看是多久（$v=0.8c$）？
3. 一根棒静止时长 2 m，以 0.6c 沿棒长方向运动，地面量到多长？

**1.** 1.25。

**2.** $1\times 5/3\approx 1.67$ 小时。

**3.** $2\times 0.8=1.6$ m。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 填5　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

一列固有长度为 $l_0$ 的火车以速度 $v$ 向右匀速运动，当它通过一个与它固有长度相同的站台时，站台上观察者发现，站台左端先与车尾重合；若经过 $\Delta t$ 时间后，站台的右端与车头重合，则火车的运动速度 $v$ = ____。

**一句话：车在站台系里收缩了，抓住两次端点重合。**

① 第一步：站台系中车长 $l = l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$，别直接用 $l_0$。

② 事件 1：左端与车尾重合，车头在 $x = l$；事件 2：右端与车头重合，车头在 $x = l_0$。

③ 关键式子：$v\Delta t = l_0 - l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$

④ 解得 $\boldsymbol{v = \dfrac{2c^2\Delta t\, l_0}{c^2\Delta t^2 + l_0^2}}$。

## 2023 卷 · 真题 1 道

### 2023 · 填6　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

$K'$ 系相对 $K$ 系沿 $x$ 轴匀速运动。静止于 $K'$ 系的刚性尺与 $x'$ 轴成 30°，在 $K$ 系中观察到它与 $x$ 轴成 45°，则速度为 _____。

**一句话：只有平行方向收缩，用 tan 之比求 $\gamma$。**

① 写 $K'$ 中两投影：$L_0\cos30^\circ$、$L_0\sin30^\circ$。

② 到 $K$ 系：平行分量收缩，垂直分量不变。

③ 关键式子：$\tan45^\circ = \dfrac{\tan30^\circ}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \sqrt{1-v^2/c^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

④ 得出：$\boldsymbol{v = \dfrac{\sqrt{6}}{3}c}$。

## 2022 卷 · 真题 2 道

### 2022 · 选6　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

一光子以速度 $c$ 运动，一人以 $0.9c$ 的速度去追，此人观察到的光子速度为（ ） A、$0.1c$

B、$c$

C、$\sqrt{0.19c}$

D、$0.9c$

**这题考狭义相对论的光速不变原理：在任何惯性系中，真空中光速都等于 $c$，与观察者的运动无关。**

所以无论此人以多大速度去追，他测得的光子速度仍是 $c$。

若用相对论速度变换公式验算，$u=c$、$v=0.9c$：$u'=\dfrac{u-v}{1-\dfrac{uv}{c^2}}=\dfrac{c-0.9c}{1-0.9}=c$ 结果仍是 $c$，与"追近"的经典直觉完全不同。

故选 **B**。

注意：$0.1c$（A 选项）是伽利略速度叠加的产物，只有对 $u<c$ 的实物粒子才谈得上"相对速度"；光速不变是相对论的基本假设，不能靠叠加去减。

### 2022 · 填6　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

观察者测得一沿米尺长度方向匀速运动的米尺的长度为 $0.5\text{m}$。则此米尺以速率 $v=$ ____ 接近观察者。（用真空中光速 $c$ 表示）

**考长度收缩（尺缩效应），并且要注意区分固有长度与测量长度。**

米尺的固有长度 $l_0=1\text{m}$，沿运动方向测得的长度为 $l=l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

代入数据：$0.5=1\times\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$，得 $1-\dfrac{v^2}{c^2}=0.25$，即 $\dfrac{v^2}{c^2}=0.75$，所以 $v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\approx0.866c$。

**答案为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$。**

注意：尺缩只发生在运动方向上，垂直于运动方向的尺寸不变；公式中的 $l_0$ 必须是与尺相对静止时测得的长度，本题是 $1\text{m}$ 而不是 $0.5\text{m}$。

## 2021 卷 · 真题 1 道

### 2021 · 选7　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

火箭固有长 $L$，相对地面匀速 $v_1$。火箭上的人以相对火箭的速度 $v_2$ 从后端向靶发射子弹。在**火箭上**测得子弹飞行时间是（　）

(A) $\dfrac{L}{v_1+v_2}$

(B) $\dfrac{L}{v_2}$

(C) $\dfrac{L}{v_2-v_1}$

(D) $\dfrac{L}{v_1\sqrt{1-(v_1/c)^2}}$

**一句话：同一参考系内直接相除，不用跨系换算。**

① 题目问的是"火箭上测的时间"，只用在火箭系里的量。

② 关键式子：$\Delta t=\dfrac{L}{v_2}$。

③ 靶相对火箭静止，距离就是固有长度 $L$，**答案 B**。

④ 注意：$v_1+v_2$ 是地面系的速度，与本题无关。

# 16 狭义相对论（下）：变换与动力学

40 分钟 · 选 8

上一讲讲现象，这一讲讲怎么算。

**一句话：**洛伦兹变换是"两个参考系之间的翻译表"；质量随速度增大，能量和质量的统一公式是 $E=mc^2$。

? 伽利略变换说 $x'=x-vt$，时间不变。
但那样的话光速就会变（因为速度要加减）。
**为了保住光速不变，位置和时间必须"混在一起"变换。**

先讲清楚

## 一、洛伦兹变换

设 $S'$ 相对 $S$ 以 $v$ 沿 $x$ 正方向运动：

$$\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)$$

$$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\frac{v\Delta x}{c^2})$$

$\Delta y'=\Delta y$，$\Delta z'=\Delta z$（垂直方向不变）。

**两个要点：**

- 当 $v\ll c$ 时，$\gamma\to 1$，$v\Delta x/c^2\to 0$，退化成伽利略变换 ✓
- **时间变换里出现了 $\Delta x$**：位置不同的事件，"同时性"就不同。

## 二、三个效应的统一来源

把上面两个式子套特殊情形，就能推出时间膨胀和长度收缩：

- **时间膨胀：**在 $S'$ 里同一地点（$\Delta x'=0$）的两个事件，反过来解得 $\Delta t=\gamma\Delta t'$。
- **长度收缩：**在 $S$ 里**同时**（$\Delta t=0$）测两端，得 $\Delta x'=\gamma\Delta x$。

**所以三个效应其实是一个变换的三个侧面。**

## 三、相对论动力学

$$m=\gamma m_0=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

质量随速度增大，所以加速度越来越难，**永远到不了光速**。

总能量：

$$E=mc^2=\gamma m_0c^2$$

静止能量：$E_0=m_0c^2$。动能就是两者之差：

$$E_k=E-E_0=(\gamma-1)m_0c^2$$

**低速时可以验证：**$\gamma\approx 1+\frac{v^2}{2c^2}$，所以 $E_k\approx\frac{1}{2}m_0v^2$ ✓（回到了牛顿力学）

> **能量-动量关系（很好用）：**
>
> $$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$$
>
> 它把"求动量"和"求能量"连起来，量子部分求德布罗意波长就靠它。

**停一下，回答我：**一个粒子的速度趋近光速时，它的动能趋向什么？

$\gamma\to\infty$，所以 $E_k\to\infty$。**需要无穷大的能量才能把有质量的粒子加速到光速** —— 这就是光速是上限的原因。

**必背 · 六条**

| | |
|---|---|
| $\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)$ | 位置变换 |
| $\Delta t'=\gamma(\Delta t-v\Delta x/c^2)$ | 时间变换 |
| $m=\gamma m_0$ | 质速关系 |
| $E=mc^2$ | 质能关系 |
| $E_k=(\gamma-1)m_0c^2$ | 相对论动能 |
| $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$ | 能量-动量关系 |

**例 16.1** 变换练习　两个事件

在 $S$ 系中，事件 A 发生在 $(x=0, t=0)$，事件 B 发生在 $(x=3\ \text{m}, t=1\times10^{-8}\ \text{s})$。$S'$ 系以 $0.6c$ 沿 $x$ 正向运动。求在 $S'$ 中两事件的时间间隔。

$\gamma=1.25$，$\Delta x=3$ m，$\Delta t=10^{-8}$ s，$v=1.8\times10^8$ m/s。

$$\Delta t'=\gamma\left(\Delta t-\frac{v\Delta x}{c^2}\right)=1.25\left(10^{-8}-\frac{1.8\times10^8\times3}{9\times10^{16}}\right)$$

$$=1.25(10^{-8}-6\times10^{-9})=1.25\times4\times10^{-9}=5\times10^{-9}\ \text{s}$$

注意 $v\Delta x/c^2$ 这一项**不能漏**，它是相对论的核心修正。

⚠ **三个坑：**

① **时间变换漏掉 $v\Delta x/c^2$。**只写 $\gamma\Delta t$ 就变成"时间只膨胀"，那就错了。

② **把总能量当动能。**$E_k=E-E_0$。

③ **$\gamma$ 里的 $v$ 用的是相对速度。**两个参考系之间的速度，不是某个物体在系里的速度。

**自测 · 3 道**

1. 粒子速度 $0.6c$ 时，质量是静止质量的几倍？
2. 静止能量 $E_0=m_0c^2$，一个电子的静止能量约多少 MeV？（$m_ec^2=0.511$ MeV）
3. 相对论动能公式在低速时退化为什么？

**1.** 1.25 倍。

**2.** 0.511 MeV。

**3.** $\frac{1}{2}m_0v^2$（经典动能）。

## 2024 卷 · 真题 2 道

### 2024 · 选8　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

一粒子在加速器中被加速，当其质量为静止质量的 3 倍时，其动能为静止能量的（ ）。

A. 2 倍

B. 3 倍

C. 6 倍

D. 8 倍

**一句话：$m=\gamma m_0$，动能要减掉静止能量。**

① 第一步：由 $m=3m_0$ 得 $\gamma=3$。

② 关键式子：$E_k=(\gamma-1)m_0c^2=2E_0$

③ 得 2 倍，**答案 A**。

**注意**：3 倍的是总能量，不是动能，别选 B。

## 2024 · 算4　10 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

一道闪光从 $O$ 点发出，在 $P$ 点被接收。在 $S$ 系中，$OP$ 具有长度 $l$ 且同 $x$ 轴正方向成 $\theta$ 角，如图所示。

在相对于 $S$ 系以恒速 $v$ 沿 $x$ 轴正方向运动的 $S'$ 系中，试求：

(1) 从光的发出到接收相隔的时间 $\Delta t'$；

(2) 光的发出点 $O$ 与接收点 $P$ 的空间间隔 $l'$。

（图：$O$ 为坐标原点，$P$ 在 $x$ 轴上方，线段 $OP$ 长为 $l$，与 $x$ 轴正方向成 $\theta$ 角）

**一句话：写两事件的 $\Delta x$、$\Delta t$，直接套洛伦兹变换。**

① 第一步：$S$ 系中事件 1 在原点，事件 2 在 $(l\cos\theta, l\sin\theta)$，光走 $t = \dfrac{l}{c}$。

② 得 $\Delta x = l\cos\theta$，$\Delta y = l\sin\theta$，$\Delta t = \dfrac{l}{c}$。

③ 关键式子：$\Delta t' = \dfrac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{l(1-\frac{v}{c}\cos\theta)}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$

④ 第二步：光在 $S'$ 系仍以 $c$ 传播，空间间隔就是 $l' = c\Delta t'$。

⑤ 得出：$\boldsymbol{\Delta t' = \dfrac{l(1-\frac{v}{c}\cos\theta)}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}}$，$\boldsymbol{l' = \dfrac{l(1-\frac{v}{c}\cos\theta)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$。

**注意**：$l$ 是两事件的空间间隔，不是"尺子长度"，不能对它做长度收缩。

## 2023 卷 · 真题 2 道

### 2023 · 选10　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

立方体静止质量 $m_0$、体积 $V_0$，沿一棱方向以接近光速的 $v$ 运动，其密度为（　）

A、$m_0/V_0$

B、$\dfrac{m_0}{V_0\sqrt{1-v^2/c^2}}$

C、$\dfrac{m_0}{V_0(1-v^2/c^2)}$

D、$\dfrac{m_0}{V_0(1-v^2/c^2)^2}$

**一句话：质量变大 $\gamma$ 倍、体积变小 $1/\gamma$ 倍。**

① 两个效应都要算：质量增大，只有运动方向那条棱收缩。

② 关键式子：$m=\gamma m_0$，$V=V_0/\gamma$ ③ 密度 $=\dfrac{m}{V}=\dfrac{m_0}{V_0(1-v^2/c^2)}$，选 **C**。

④ 注意：只算收缩忘了质量，就会错选 B。

### 2023 · 算4　10 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

飞船以 $0.8c$ 飞行，宇航员测得 $3\times10^{-7}$s 内一束光从船尾传到船头。求 (1) 固有长度；(2) 地面测得的长度；(3) 地面测得两事件的空间间隔。

**一句话：光速不变 + 洛伦兹变换，两步走。**

① 定事件：船尾发光、船头收到，船系中光正好走一个船身。

② 关键式子：$l_0=c\Delta t'=3\times10^8\times3\times10^{-7}=90\text{m}$ ③ 长度收缩：$l=l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=90\times0.6=54\text{m}$。

④ 洛伦兹变换：$\Delta x=\dfrac{\Delta x'+v\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ⑤ 代入：$\dfrac{90+0.8c\cdot(90/c)}{0.6}=270\text{m}$。

⑥ 得出：**(1) 90 m；(2) 54 m；(3) 270 m**。

注意：别把 54 m 当第 (3) 问。

## 2022 卷 · 真题 1 道

### 2022 · 算4　10 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

在某地发生两件事，静止位于该地的甲测得时间间隔为 4s，相对甲做匀速直线运动的乙测得时间间隔为 5s，求乙测得的两件事的空间间隔（$c$ 表示真空中光速）。

**考时间膨胀与洛伦兹变换，关键第一步是认出"同地事件"——甲静止于该地，两事件发生在同一地点。**

设甲为 S 系、乙为 S′ 系，则 $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$，$\Delta t = 4\text{s}$ 是固有时间；乙测得 $\Delta t' = 5\text{s}$。

由洛伦兹变换 $\Delta t' = \dfrac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ 代入 $\Delta x = 0$ 得 $5 = \dfrac{4}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$，即 $\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}} = 0.8$，$u = \dfrac{3}{5}c$

再用空间部分的洛伦兹变换 $\Delta x' = \dfrac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \dfrac{0 - \frac{3}{5}c \times 4}{0.8} = -3c$

负号只表示乙看到两事件的空间次序与相对运动方向相反，空间间隔取绝对值。

**故乙测得的两件事的空间间隔为 $3c$。**

可以用间隔不变性核对：$\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = 9c^2 - 25c^2 = -16c^2$，而 $\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 = 0 - 16c^2 = -16c^2$，两者相等，结果自洽。

注意：不要把 4s 当成乙的固有时间——固有时间是"同一地点两事件"的时间间隔，乙相对甲运动，看到两事件发生在不同地点，测得的 5s 更长，这正是时间膨胀；解题顺序应是先由时间膨胀定 $u$，再用洛伦兹变换求空间间隔。

## 2021 卷 · 真题 1 道

### 2021 · 选8　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

高速电子总能量是其静止能量的 $k$ 倍，此时速率为（　）

(A) $kc$

(B) $c/k$

(C) $\dfrac{c\sqrt{1-k^2}}{k}$

(D) $\dfrac{c\sqrt{k^2-1}}{k}$

**一句话：总能量定出 $\gamma=k$，再由 $\gamma$ 反解速率。**

① 写出总能量 $E=\gamma m_0c^2$，与静止能量相除。

② 关键式子：$\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=k$。

③ 平方解出 $v=\dfrac{c\sqrt{k^2-1}}{k}$，**答案 D**。

④ 注意：$k\geq1$；(A) 会超光速，(C) 根号内为负。

## 17 黑体辐射与光电效应

35 分钟 · 填 6、填 7

量子力学的两扇门，都是从"经典物理算不出来"打开的。

**一句话：**黑体辐射逼出了"能量量子化"，光电效应逼出了"光量子"。**两个实验，一个结论：能量是一份一份的。**

? 烧红的铁先发暗红，再发橙黄，最后发白 —— 为什么温度越高颜色越"蓝"？
经典理论算出来是"紫外灾难"（高频端能量无穷大）。**普朗克用一个"$h$"把答案摁住了。**

先讲清楚

### 一、黑体辐射的两条定律

**① 维恩位移定律：**

$$\lambda_m T=b\quad(b=2.898\times10^{-3}\ \text{m·K})$$

温度越高，峰值波长越短（越偏蓝）。**太阳表面 5800 K，峰值在 500 nm 左右（绿光），人眼进化得刚好对这最敏感。**

**② 斯特藩-玻尔兹曼定律：**

$$M=\sigma T^4 \quad (\sigma=5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2\cdot K^4)})$$

总辐射功率按 $T^4$ 增长，**温度翻倍，辐射功率变 16 倍**。

## 二、普朗克的量子假设

他假设：振子的能量只能取 $h\nu$ 的整数倍：

$$E=nh\nu \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$h=6.63\times10^{-34}$ J·s 是普朗克常数。

**这个假设在当时毫无道理，但算出来和实验完全吻合。**后来爱因斯坦把它推广到"光本身就是一份份的"。

## 三、光电效应的四条实验规律

| 现象 | 经典理论怎么解释 | 实际 |
| --- | --- | --- |
| 有**截止频率** $\nu_0$，低于它无论多强都不行 | 解释不了 | 光子能量不够 |
| 光强增大，**电流增大但电压不变** | 应该电压也增大 | 光子数多了，单个能量不变 |
| 几乎是**瞬时**的 | 应该要积累能量 | 一个光子打一个电子 |
| 遏止电压与**频率成线性**关系 | 解释不了 | $eU_a=h\nu-A$ |

## 四、爱因斯坦光电方程

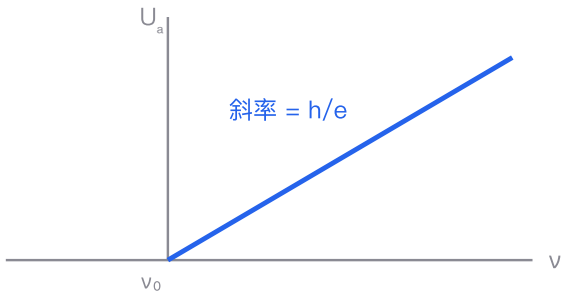
$$h\nu=A+eU_a$$

$A$ 是逸出功（把电子从金属里拉出来要的能量），$eU_a$ 是电子最大初动能。

改写一下：

$$U_a=\frac{h}{e}\nu-\frac{A}{e}$$

**所以 $U_a$–$\nu$ 图是一条直线：**斜率 $\frac{h}{e}$（与材料无关），截距 $-\frac{A}{e}$（与材料有关）。




直线斜率与材料无关，截距才是材料决定的

图 12：光电效应的 $U_a$–$\nu$ 图。斜率只含 $h$ 和 $e$。

**停一下，回答我：**用很强的红光（频率低于 $\nu_0$）照金属，能打出电子吗？

**不能。**光电效应看的是**单个光子的能量** $h\nu$，而不是总能量。

红光光子能量不够，一个电子吸收一个光子后仍然逃不出来。**光再强只是光子更多，每个还是一样的弱。**

**必背 · 五条**

| | |
|---|---|
| $\lambda_m T=b$ | 维恩位移 |
| $M=\sigma T^4$ | 斯特藩-玻尔兹曼 |
| $h\nu=A+eU_a$ | 光电方程 |
| 斜率 $K=h/e$ | 与材料无关 |
| $h=6.63\times10^{-34}$ J·s | 普朗克常数 |

⚠ **三个坑：**

① **以为光越强越容易打出电子。**看的是频率。

② **把 $A$ 和 $eU_a$ 搞混。**$A$ 是逸出功（材料属性），$eU_a$ 是最大初动能。

③ **维恩定律记反。**$T$ 升，$\lambda_m$ 降。

**自测 · 3 道**

1. 太阳表面 5800 K，峰值波长大约多少 nm?
2. 换一种逸出功更大的金属，$U_a$–$\nu$ 直线的斜率变不变?
3. 光的强度增大，遏止电压变不变?

**1.** $\lambda = b/T = 2.898\times10^{-3}/5800 \approx 500$ nm。

**2.** 不变（斜率只含 $h/e$），截距变。

**3.** 不变（光强只影响电流大小）。

## 2024 卷 · 真题 2 道

### 2024 · 填6　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

当黑体的绝对温度 $T$ 增加时，其辐射的峰值波长 $\lambda_m$ ____。（填"增大""减小"或"不变"）

**一句话：维恩位移定律 $\lambda_m T = b$，越热越偏短波。**

① 第一步：峰值波长与绝对温度成反比。

② 关键式子：$\lambda_m T = 2.898\times10^{-3}\,\mathrm{m\cdot K}$

③ 得出：$\lambda_m$ **减小**。

**注意**：总辐射本领同时按 $T^4$ 迅速增大，两件事别混。

## 2024 · 填7　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

在光电效应实验中，遏止电压 $U_a$ 与照射光的频率 $\nu$ 成线性关系，$U_a = K(\nu - \nu_0)$，其中 $K$ 是一个与材料性质无关的普适常量，其用基本物理常量表示为 $K =$ ____。（可能用到的基本物理常量：真空中光速 $c$、电子电量 $e$、电子静止质量 $m_e$、普朗克常量 $h$、真空介电常数 $\varepsilon_0$）

**一句话：$eU_a = h\nu - A$，斜率就是 $\frac{h}{e}$。**

① 第一步：最大动能 $E_{k,\max} = h\nu - A = eU_a$。

② 关键式子：$U_a = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}$

③ 与 $U_a = K(\nu - \nu_0)$ 对比：$K = \frac{h}{e}$，$\nu_0 = \frac{A}{h}$。

④ 得出：$K = \frac{h}{e}$（与材料无关的正是斜率）。

## 2023 卷 · 真题 1 道

## 2023 · 选6　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

用频率 $\nu$ 的单色光照射某金属，光电子最大动能 $E_k$；改用 $2\nu$ 照射，最大动能为（　）

A、$2E_k$

B、$2h\nu - E_k$

C、$h\nu - E_k$

D、$h\nu + E_k$

**一句话：光电方程里逸出功 $A$ 不变。**

① 先定 $A$：由第一次照射 $A = h\nu - E_k$。

② 关键式子：$E_k' = 2h\nu - A = h\nu + E_k$ ③ 得出：选 **D**。

注意：频率加倍，动能并不加倍。

## 2022 卷 · 真题 1 道

**2022 · 选7** 3 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

用绿光照射一光电管，发生了光电效应，欲使光电子从阴极逸出的最大初动能增加，下列做法可取的是（ ） A、改用红光照射

B、增大绿光的强度

C、增大光电管上的加速电压

D、改用紫光照射

**考爱因斯坦光电方程，最大初动能只由入射光频率和阴极逸出功决定：** $h\nu = A + E_{k,max}$**，即** $E_{k,max} = h\nu - A$

**要提高** $E_{k,max}$**，只能提高入射光频率。**

紫光频率高于绿光，故选 **D**。

增大光强只增加单位时间的光子数，使饱和光电流变大，最大初动能不变，B 错；加速电压只改变光电子到达阳极时的动能，不改变它"逸出时的最大初动能"，C 错；红光频率低于绿光，连光电效应都可能不发生，A 错。

注意：一定要分清"光电子逸出时的最大初动能"和"被加速后的动能"，后者才与加速电压有关。

# 18 康普顿散射

25 分钟 · 填 8

光子和电子撞了一下，波长变长了 —— 光的粒子性有了铁证。

**一句话：** X 射线被电子散射后波长变长，变化量只与**散射角**有关，与入射波长无关。

? 如果光是波，散射只是改变方向，波长应该不变。
但实验发现波长变长了。**只有"光子把能量分给了电子"才能解释。**

先讲清楚

### 一、实验事实

波长 $\lambda_0$ 的 X 射线打到石墨上，散射后有两个波长：

- $\lambda_0$（没被散射的，或者撞上整个原子的）；
- $\lambda_0+\Delta\lambda$（被单个电子散射的，能量变小）。

## 二、公式

$$\Delta\lambda=\lambda_c(1-\cos\varphi)$$

$\lambda_c=\dfrac{h}{m_e c}=2.43\times10^{-12}$ m，叫康普顿波长。

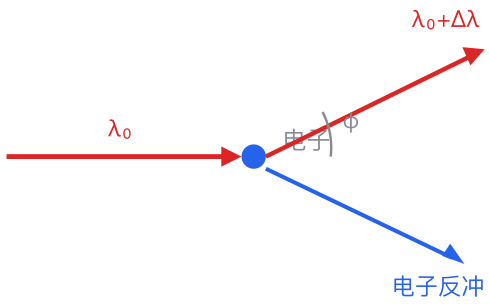
| 散射角 | $\Delta\lambda$ | 说明 |
| --- | --- | --- |
| $0^\circ$ | 0 | 没散射 |
| $90^\circ$ | $\lambda_c$ | 最常考 |
| $180^\circ$ | $2\lambda_c$ | 最大值（反弹回来） |

## 三、怎么推出来的（了解思路）

把光子当粒子，和电子做**弹性碰撞**：

- **能量守恒**：$h\nu_0+m_e c^2=h\nu+\gamma\, m_e c^2$
- **动量守恒**：$\vec{p}_0=\vec{p}+\vec{p}_e$

联立消去电子的量，就得到上面的 $\Delta\lambda$ 公式。**推导不用背，但要知道它是"二守恒"的结果。**




光子损失能量 ⇒ 波长变长

图 13：康普顿散射是"光子-电子"的弹性碰撞，能量和动量都守恒。

**停一下，回答我：**为什么康普顿散射只有在 X 射线这种高频率的光上才明显？

因为 $\Delta\lambda$ 是个**固定值**（约 $10^{-12}$ m 量级）。

可见光波长约 $5\times10^{-7}$ m，相对变化只有 $10^{-5}$，测不出来；X 射线波长约 $10^{-10}$ m，相对变化 1%，很明显。

**必背 · 三条**

| | |
|---|---|
| $\Delta\lambda=\lambda_c(1-\cos\varphi)$ | 康普顿公式 |
| $\lambda_c=\dfrac{h}{m_e c}=2.43\ \text{pm}$ | 康普顿波长 |
| $90^\circ \Rightarrow \Delta\lambda=\lambda_c$ | 最常考的点 |

⚠ **两个坑：**

① **忘了"还有一个原波长"。**题问"为____和____"就是两个都要写。

② **cos 记错。**$\varphi=0$ 时 $\cos=1 \Rightarrow \Delta\lambda=0$；$\varphi=180^\circ$ 时 $\cos=-1 \Rightarrow 2\lambda_c$。

**自测 · 2 道**

1. 散射角 $180^\circ$ 时波长变化多少?
2. 康普顿散射波长变长还是变短? 为什么?

**1.** $2\lambda_c$。

**2.** 变长。光子把能量给了电子，$E=h\nu=hc/\lambda$ 变小 $\Rightarrow \lambda$ 变大。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 填8　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

在康普顿散射实验中，波长为 $\lambda_0$ 的 X 射线经物质散射后，在散射角为 90° 处观察，散射的 X 射线波长为 ____ 和 ____。(已知电子的康普顿波长为 $\lambda_c$)

**一句话：频移只由散射角定，90° 时正好移 $\lambda_c$。**

① 第一步：$\Delta\lambda=\lambda_c(1-\cos\theta)$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时 $\cos\theta=0$。

② 关键式子：$\lambda=\lambda_0+\lambda_c$

③ 另有不变线 $\lambda_0$：光子与整个原子弹性碰撞，几乎不损失能量。

④ 得出：**$\lambda_0$ 和 $\lambda_0+\lambda_c$。**

## 2023 卷 · 真题 1 道

### 2023 · 填8 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

康普顿散射中，散射光波长是入射光波长的 1.2 倍，则 $\varepsilon/E_k$= _____。

**一句话：能量守恒，把波长比换成能量比。**

① 光子能量 $E=\frac{hc}{\lambda}$，故 $\varepsilon=\frac{E_0}{1.2}$。

② 关键式子：$E_k=E_0-\varepsilon=E_0(1-\frac{1}{1.2})=\frac{E_0}{6}$ ③ 得出：$\frac{\varepsilon}{E_k}=\frac{1/1.2}{1/6}=5$。

## 2022 卷 · 真题 2 道

### 2022 · 选8 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

在康普顿散射中，若散射光子与原来入射光子方向成 θ 角，当（ ）时，散射光子的频率减少最多。 A、θ = 0°

B、θ = π/2

C、θ = π

D、θ = π/4

**考康普顿散射的波长改变公式：** $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$

**cos θ 越小，Δλ 越大。**

θ = π 时 cos θ = -1，$\Delta\lambda=\frac{2h}{m_e c}$ 达到最大。

波长越长频率越小（$\nu=\frac{c}{\lambda}$），所以 θ = π（背向散射）时散射光子频率减少最多，能量损失最多，反冲电子获得的能量也最多。

故选 **C**。

注意：θ = 0 时 Δλ = 0，光子沿原方向前进、频率不变，完全没有把能量交给电子，这是极端情况而不是最大值。

**2022 · 填7** 3 分 ○ 会 ○ 卡 ○ 不会

在康普顿散射中，如果反冲电子的速度为光速的 60%，则因散射使电子获得的能量是其静止能量的____倍。

**考相对论动能与康普顿散射中的能量守恒：电子获得的能量就是它的动能。**

相对论动能 $E_k = mc^2 - m_ec^2 = (\gamma - 1)m_ec^2$，其中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

当 $v = 0.6c$ 时，$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 0.36}} = \dfrac{1}{0.8} = 1.25$ 故 $E_k = 0.25m_ec^2$，即电子获得的能量是其静止能量的 **1/4** 倍。

注意：$0.6c$ 已属高速，不能用经典式 $\dfrac{1}{2}m_ev^2 = 0.18m_ec^2$ 去算；$m_ec^2$ 就是电子的静止能量，题目问的是"倍数"，不必代入具体数值。

## 19 德布罗意波

25 分钟 · 填 9

既然波能像粒子，粒子为什么不能像波?

> **一句话：**任何实物粒子都有波长 $\lambda=h/p$。**动量越大，波长越短**，所以宏观物体完全看不出波动。

? 电子是粒子，这毫无疑问（能打偏、能计数）。
但 1927 年，电子束穿过晶体后居然出现了**衍射条纹** —— 那是波才有的现象。
**德布罗意的假设被证实了。**

先讲清楚

### 一、公式

$$\lambda=\frac{h}{p}$$

这就是德布罗意关系。**和光子的 $\lambda=h/p$ 形式完全一样**，只是光子 $p=E/c$，实物粒子 $p=mv$。

### 二、两种算法：低速 vs 高速

**低速**（$v\ll c$）：

$$p=mv=\sqrt{2m_0E_k}$$

**高速（相对论）**：用能量-动量关系更保险：

$$E=E_k+m_0c^2,\quad E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$$

解得：

$$p=\frac{\sqrt{E_k^2+2E_km_0c^2}}{c}$$

所以：

$$\lambda=\frac{hc}{\sqrt{E_k^2+2E_kE_0}}\quad(E_0=m_0c^2)$$

> **怎么判断该用哪个？** 看 $E_k$ 和 $E_0$ 的比。
> 电子 $E_0$=511 keV，若 $E_k$ 只有几 eV 到几十 keV，**非相对论够用**；若题目说"高速"或 $E_k$ 接近 MeV，**必须用相对论式**。

## 三、不确定关系（补充）

$$\Delta x\cdot\Delta p_x\geq\frac{\hbar}{2}$$

位置测得越准（$\Delta x$ 小），动量就越不确定。**这不是仪器不行，是本质。**

> **停一下，回答我：** 一个 1 kg 的球以 1 m/s 运动，波长是多少？

$\lambda=\frac{6.63\times10^{-34}}{1\times1}=6.63\times10^{-34}$ m。

比原子核（$10^{-15}$ m）还小十几个数量级，**任何实验都测不出它的波动性**。所以宏观世界看起来是"纯粒子"的。

**必背 · 三条**

| | |
|---|---|
| $\lambda=h/p$ | 德布罗意关系 |
| 低速 $p=\sqrt{2m_0E_k}$ | 非相对论 |
| $\lambda=\frac{hc}{\sqrt{E_k^2+2E_kE_0}}$ | 相对论 |

**例 20.1** 非相对论　电子衍射

电子被 100 V 电压加速，求它的德布罗意波长。

$E_k = eU = 100$ eV $\ll 511$ keV，用非相对论：

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = \frac{1.226}{\sqrt{U}}\ \text{nm} = 0.123\ \text{nm}$$

这个数和原子间距同量级，所以电子能用来做晶体衍射、电子显微镜。

⚠ **两个坑：**

① **"高速"还硬套 $p=mv$。**必须用能量关系。

② **把 $E_k$ 直接当成 $E$。**总能量是 $E_k+E_0$。

**自测 · 2 道**

1. 动能为 $E_k$、静止能为 $E_0$，且 $E_k=E_0$，波长是多少（用 $h,c,E_0$ 表示）？
2. 为什么宏观物体没有波动性?

**1.** $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{E_0^2+2E_0^2}} = \dfrac{hc}{\sqrt{3}E_0}$。

**2.** 动量太大，波长小到无法观测。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 填9　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

一个高速运动的实物粒子，其动能为 $E_k$，静止能量为 $E_0$。则考虑相对论效应时该粒子的德布罗意波长 $\lambda =$ _____。（可能用到的基本物理常量：真空光速 $c$、电子电量 $e$、电子静止质量 $m_e$、普朗克常量 $h$、真空介电常数 $\varepsilon_0$）

**一句话：先由能量动量关系求 $p$，再用 $\lambda = \frac{h}{p}$。**

① 第一步：总能量 $E = E_k + E_0$，且 $E^2 = (pc)^2 + E_0^2$。

② 关键式子：$pc = \sqrt{E_k^2 + 2E_kE_0}$

③ 得出：$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_k^2 + 2E_kE_0}}$。

**注意**：$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}$ 只在 $E_k$ 远小于 $E_0$ 时可用。

## 2023 卷 · 真题 1 道

### 2023 · 选8　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

两个质量不同的粒子德布罗意波长相同，则这两种粒子的（　）

A、动量相同

B、能量相同

C、速度相同

D、动能相同

**一句话：$\lambda = h/p$，波长同则动量同。**

① 抓唯一确定量：$\lambda$ 同、$h$ 是常数。

② 关键式子：$p = h/\lambda$，动量必相同。

③ 其余都变：$v = p/m$、$p^2/2m$ 因 $m$ 不同而不同。

④ 得出：选 **A**。

## 2022 卷 · 真题 2 道

### 2022 · 选10 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

波函数在空间各点的振幅同时增大 $D$ 倍，则粒子在空间的分布几率将（ ） A、增大 $D^2$ 倍

B、增大 $2D$ 倍

C、增大 $D$ 倍

D、不变

**考波函数的统计解释和归一化条件：几率密度是 $|\psi|^2$，但波函数必须归一化之后才有物理意义。**

若 $\psi \to D\psi$，则 $|\psi|^2 \to D^2|\psi|^2$；可是归一化条件 $\int |\psi|^2 \, dV = 1$ 要求总几率仍为 1；乘上 $D$ 后总几率变成 $D^2$，必须再除以 $D$ 才能归一化，归一化之后仍是原来那个 $\psi$，因此 $D\psi$ 与 $\psi$ 描述同一个物理状态。

归一化后的几率密度分布完全不变，故选 **D**。

注意：只有"归一化后的波函数"整体乘常数才不改变物理内容；如果题目问的是未归一化的 $|\psi|^2$ 的数值，那才会增大 $D^2$ 倍，A 选项就是为这个混淆准备的。

### 2022 · 填9 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

若 α 粒子（电量为 $2e$）在磁感应强度大小为 $B$ 的均匀磁场中沿半径为 $R$ 的圆形轨道运动，则 α 粒子的德布罗意波长为____。

**考带电粒子在磁场中的圆周运动与德布罗意关系的结合。**

α 粒子做匀速圆周运动，洛伦兹力提供向心力：$2evB = \dfrac{mv^2}{R}$，得 $p = mv = 2eBR$

再由德布罗意公式 $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{2eBR}$ **答案为** $\boldsymbol{\dfrac{h}{2eBR}}$。

注意：本题不必知道 α 粒子的质量，因为动量已被 $2eBR$ 完全确定；电荷要取 $2e$，漏掉这个 2 就会错写成 $\dfrac{h}{eBR}$。

## 2021 卷 · 真题 1 道

### 2021 · 选10　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

把微观粒子的波函数在空间各点的振幅同时增大 $D$ 倍，则粒子在空间的分布几率将（　）

(A) 增大 $D^2$ 倍

(B) 增大 $2D$ 倍

(C) 增大 $D$ 倍

(D) 不变

**一句话：波函数归一化，整体乘常数不改变几率分布。**

① 有物理意义的是归一化之后的 $|\psi|^2$。

② 关键式子：$\int|\psi|^2dV=1$ 会把 $D^2$ 完全吸收。

③ 归一化后分布一点没变，**答案 D**。

④ 注意：单点看确实乘了 $D^2$，但相对分布不变。

## 20 氢原子与四个量子数

35 分钟 · 选 9、选 10

原子只发出几条固定颜色的光 —— 这就是"能量是分立的"最直接的证据。

**一句话：**氢原子的电子只能待在**特定能级**上，跳下来就发一个光子，$h\nu=E_m-E_n$。四个量子数就是这套能级的"门牌号"。

? 给氢气管通电，它会发出红、青、蓝几条特定的谱线。
如果是"什么颜色都能发"，应该是连续的光谱。
**只有分立能级才能解释这种"只有几条线"的现象。**

先讲清楚

### 一、巴耳末系的经验公式

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$

$R=1.097\times10^7\ \mathrm{m^{-1}}$ 叫里德伯常数。$n_2>n_1$。

各光谱系对应不同的 $n_1$：

| $n_1$ | 名称 | 区域 |
| --- | --- | --- |
| 1 | 赖曼系 | 紫外 |
| **2** | **巴耳末系** | **可见光** |
| 3 | 帕申系 | 红外 |

## 二、玻尔的三条假设

1. **定态假设**：电子只能在特定的轨道上运动，不辐射能量；
2. **跃迁假设**：电子从 $m$ 跳到 $n$，放出光子 $h\nu=E_m-E_n$；
3. **量子化条件**：角动量 $L=n\hbar$。

由此推出能级公式：

$$E_n=-\frac{13.6}{n^2}\ \text{eV}$$

**负号表示"被束缚"**：$n\to\infty$ 时 $E\to 0$（电子脱离原子），$n=1$ 时最低（-13.6 eV）。

## 三、由能级推波长

$h\nu=E_m-E_n$，而 $\nu=c/\lambda$，所以：

$$\frac{hc}{\lambda}=E_m-E_n$$

用 $hc=1240$ eV·nm 会算得很快。

## 四、四个量子数（角标是门牌号）

| 量子数 | 能取什么 | 管什么 |
| --- | --- | --- |
| 主量子数 $n$ | $1,2,3,\cdots$ | 能级（壳层）：$n=1$ 是 K 层，$n=2$ 是 L 层 |
| 角量子数 $l$ | $0,1,\cdots,n-1$ | 角动量大小（$s,p,d,\cdots$） |
| 磁量子数 $m_l$ | $-l,\cdots,0,\cdots,l$ | 角动量的方向 |
| 自旋 $m_s$ | $+\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ | 自旋方向 |

**两条铁律**：$l<n$；$|m_l|\le l$。判断合法性全靠这两条。

> **壳层名字**：K($n$=1)、L($n$=2)、M($n$=3)、N($n$=4)。
> **所以"L 壳层"就是说 $n=2$。**看到这种说法要立刻反应过来。

**停一下，回答我：**$n$=2 的电子，$l$ 能取哪些值？$m_l$ 呢？

$l$ 取 0 或 1（因为 $l<n=2$）。

$l$=0 时 $m_l$=0；$l$=1 时 $m_l$=-1,0,+1。

一共 4 种 $(l,m_l)$ 组合，再乘自旋 2，最多容纳 **8 个电子**（这就是 L 层最多 8 个的道理）。

**必背 · 五条**

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2})$ | 广义巴耳末公式 |
| $E_n=-\frac{13.6}{n^2}$ eV | 氢原子能级 |
| $hc$=1240 eV·nm | 好用的常数 |
| $l<n$，$\lvert m_l\rvert\le l$ | 量子数合法性 |
| L 层 = $n$=2 | K/L/M/N 对应 1/2/3/4 |

⚠ **三个坑：**

① **把"L 壳层"当成 $l$=1。**壳层字母对应的是 $n$：K=1，L=2。

② **算波长比时忘了取倒数。**1/$\lambda$ 的比要倒过来才是 $\lambda$ 的比。

③ **最短/最长搞反。**能量差最大 → 波长最短。

**自测 · 3 道**

1. $n$=3 的电子，$l$ 能取哪些值?
2. 氢原子从 $n$=3 跳到 $n$=2，放出的光子能量多少 eV?
3. 巴耳末系的谱线，$n_2$ 越大波长越短还是越长?

**1.** $l$=0,1,2。

**2.** $E_3$=-1.51 eV，$E_2$=-3.4 eV，差 1.89 eV。

**3.** 越短（能量差越大）。

## 2024 卷 · 真题 2 道

### 2024 · 选9 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

氢原子光谱的巴耳末线系中，谱线最小波长与最大波长之比为（ ）。

A. 7/9

B. 5/9

C. 4/9

D. 2/9

**一句话：巴耳末系都到 $n$=2：最长 $n$=3，最短 ∞。**

① 第一步：$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2})$，$n$ = 3,4,5.....

② 最长（$n$=3）：$\frac{1}{\lambda_{max}} = R(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}) = \frac{5R}{36}$。

③ 最短（$n \to \infty$）：$\frac{1}{\lambda_{min}} = \frac{R}{4}$。

④ 关键式子：$\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} = \frac{4/R}{36/(5R)} = \frac{5}{9}$

⑤ 得出：**答案 B**。

### 2024 · 选10　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

在氢原子的 $L$ 壳层中，电子可能具有的量子数 $(n, l, m_l, m_s)$ 是（ ）。

A. $(1, 0, 0, -\frac{1}{2})$

B. $(1, 1, -1, \frac{1}{2})$

C. $(2, 1, 0, -\frac{1}{2})$

D. $(2, 2, 1, \frac{1}{2})$

**一句话：$L$ 壳层就是 $n=2$，再用 $l \le n-1$ 卡选项。**

① 第一步：$L$ 壳层 $n = 2$，A、B 的 $n = 1$ 直接排除。

② 第二步：$l$ 只能取 0 到 $n-1$，$n=2$ 时 $l \le 1$，D 的 $l = 2$ 越界。

③ 关键式子：$(2,1,0,-\frac{1}{2})$ 中 $m_l = 0$、$m_s = \pm\frac{1}{2}$，全部合法。

④ 得出：**答案 C**。

## 2023 卷 · 真题 4 道

### 2023 · 选7　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

要使基态氢原子受激后能发出赖曼系中波长最长的谱线，至少应提供的能量是（　）

A、1.5eV

B、3.4eV

C、10.2eV

D、13.6eV

**一句话：赖曼系最长波长 = 从 $n=2$ 跳到 $n=1$。**

① 先翻译：波长最长 → 能级差最小 → 最近的激发态。

② 关键式子：$\Delta E=E_2-E_1=-3.4-(-13.6)=10.2\text{eV}$ ③ 得出：选 **C**。

注意：13.6 eV 是电离能。

## 2023 · 选9 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

氢原子中处于 $2p$ 态的电子，四个量子数 $(n,l,m_l,m_s)$ 可以是（　）

A、(2,2,1,-1/2)

B、(2,0,0,1/2)

C、(2,1,-1,-1/2)

D、(2,0,1,1/2)

**一句话：把 2p 翻成 $n=2$、$l=1$，再逐项排错。**

① 翻译：$n=2$，p 态 $l=1$，$m_l=-1,0,1$，$m_s=\pm\frac{1}{2}$。

② 关键限制：$l\le n-1$ 且 $|m_l|\le l$。

③ 排错：A 的 $l=2$ 越界；B 的 $l=0$ 是 2s；D 的 $m_l=1$ 越界。

④ 得出：(2,1,-1,-1/2)，选 **C**。

## 2023 · 填7 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

玻尔氢原子中，电子在 $n=4$ 轨道的动能与基态动能之比为 _____。

**一句话：玻尔轨道 $r\propto n^2$，动能 $\propto 1/n^2$。**

① 写动能：$E_k=\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\propto\frac{1}{r}$。

② 关键式子：$r_n=n^2r_1\Rightarrow E_k\propto\frac{1}{n^2}$。

③ 得出：$\frac{1/16}{1}=\mathbf{\frac{1}{16}}$。

### 2023 · 填10 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

主量子数 $n=4$ 的壳层上最多有多少个电子?

**一句话：一个量子态一个电子，数态数。**

① 数态：$l=0,1,2,3$，每个 $l$ 有 $2l+1$ 个 $m_l$，再乘 2 个 $m_s$。

② 关键式子：$\Sigma_{l=0}^{3} 2(2l+1)=2+6+10+14=32$ ③ 得出：**32**，也等于 $2n^2$。

注意：问整个壳层，不是 4f 的 14 个。

## 2022 卷 · 真题 2 道

### 2022 · 选9 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

氢原子中处于 3d 量子态的电子，其量子态的四个量子数 $(n, l, m_l, m_s)$ 可能取的值为（ ） A、

$(3, 2, 1, -\frac{1}{2})$

B、$(3, 3, 1, \frac{1}{2})$

C、$(3, 1, 1, \frac{1}{2})$

D、$(3, 0, 1, \frac{1}{2})$

**考四个量子数的取值规则：$n = 1,2,3,\ldots$；$l = 0,1,\ldots,n-1$；$m_l = 0, \pm1, \ldots, \pm l$；$m_s = \pm\frac{1}{2}$。**

"3d"中 3 是主量子数 $n = 3$，字母 d 对应 $l = 2$。

逐项检查：B 中 $l = 3 = n$，违反 $l \le n-1$；C 中 $l = 1$ 是 3p 态而不是 3d；D 中 $l = 0$ 是 3s 态，而且 $m_l = 1$ 也超过 $|m_l| \le l = 0$ 的限制。

A 中 $n = 3$、$l = 2$、$m_l = 1$（满足 $|m_l| \le 2$）、$m_s = -\frac{1}{2}$，全部合法。

故选 **A**。

注意：先由光谱符号定 $l$（s、p、d、f 分别对应 $l = 0,1,2,3$），再检查 $m_l$ 和 $m_s$，不要只看 $n$。

## 2022 · 填8 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

根据玻尔氢原子理论，巴耳末系的所有谱线中最小波长与最大波长之比为____。

**考氢原子光谱的波数公式：** $\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2})$

**巴耳末系是跃迁到 $n_f = 2$ 的谱线，$n_i = 3,4,5,\cdots$。**

波长最小对应波数最大，即 $n_i \to \infty$：$\frac{1}{\lambda_{min}} = \frac{R}{4}$，$\lambda_{min} = \frac{4}{R}$。

波长最大对应波数最小，即 $n_i = 3$：$\frac{1}{\lambda_{max}} = R(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}) = \frac{5R}{36}$，$\lambda_{max} = \frac{36}{5R}$。

所以 $\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} = \frac{4/R}{36/(5R)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ **答案为** $\frac{5}{9}$。

注意：看清问的是"最小与最大之比"（$\frac{5}{9}$）还是"最大与最小之比"（$\frac{9}{5}$）；巴耳末系的线系极限对应 $n_i \to \infty$，不是 $n_i = 3$。

## 2021 卷 · 真题 1 道

## 2021 · 选9 3 分

○ 会 ○ 卡 ○ 不会

氢原子中处于 $2p$ 态的电子，四个量子数 $(n,l,m_l,m_s)$ 可能取（　）

(A) $(2,2,1,-\frac{1}{2})$

(B) $(2,0,0,\frac{1}{2})$

(C) $(2,1,-1,-\frac{1}{2})$

(D) $(2,0,1,\frac{1}{2})$

**一句话：由 $2p$ 定出 $n$=2、$l$=1，再逐个查量子数。**

① $p$ 态对应 $l$=1，且必须满足 $l \le n$-1。

② 关键式子：$|m_l| \le l$=1，$m_s$=$\pm\frac{1}{2}$。

③ 只有 (C) 同时满足 $n$=2,$l$=1,$|m_l| \le 1$，**答案 C**。

④ 注意：$m_l$ 的上限由 $l$ 定，不是由 $n$ 定。

# 21 一维无限深势阱

25 分钟 · 填 10

把电子关进一个盒子，能量就只能取分立值。

> **一句话：**盒子里的波必须在两端为零（出不去），所以只能形成**驻波**。驻波条件直接给出能量量子化。

? 一根两端固定的弦，只能弹出特定的音（基频、二次谐波……）。
把电子换成弦上的波，**两端固定 ⇒ 只有整数个半波** ⇒ 波长只能取特定值 ⇒ 动量、能量也只能取特定值。
**这就是量子化最直观的来源。**

先讲清楚

## 一、波函数

宽度 $a$ 的势阱（$0<x<a$ 内势能为 0，外面无穷大）：

$$\psi_n(x)=A\sin\frac{n\pi x}{a}\quad(0<x<a)，外面为\ 0$$

它满足边界条件：$\psi(0)=\psi(a)=0$。

## 二、能级

$$E_n=\frac{n^2h^2}{8ma^2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

三个特点：

- **能量分立**，$n$ 越大越密；
- **基态能量不为零**（$E_1>0$），这叫零点能 —— 因为"完全静止"违反不确定关系；
- **$a$ 越小，能级间隔越大**（盒子越小，量子效应越明显）。

## 三、归一化

粒子总得在里面，所以：

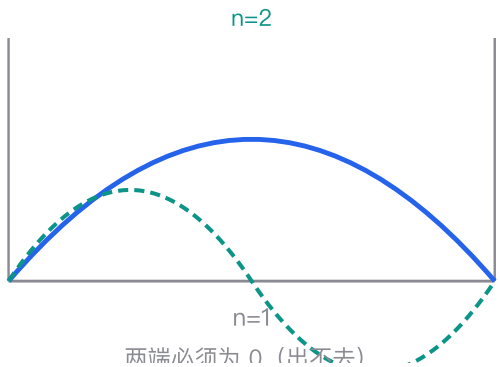
$$\int_0^a|\psi|^2dx=1$$

代入：

$$A^2\int_0^a\sin^2\frac{n\pi x}{a}\,dx=A^2\cdot\frac{a}{2}=1$$

$$A=\sqrt{\frac{2}{a}}$$

**记住 $\int_0^a\sin^2=\dfrac{a}{2}$ 这个积分**，填空题直接出答案。




波长为 2a、a、2a/3 …

⇒ 动量离散 ⇒ 能量离散

$E_n \propto n^2$

和两端固定的弦一模一样

图 14：势阱里的波必须"两端为零"，所以只能取整数个半波。

**停一下，回答我：**把势阱宽度 $a$ 变成原来的一半，基态能量变成多少？

$E_1 \propto 1/a^2$，$a$ 减半 ⇒ 能量变 **4 倍**。

**盒子越小，粒子被"关得越紧"，动能越大** —— 这也是不确定关系的体现。

**必背 · 四条**

| | |
|---|---|
| $\psi = A\sin\dfrac{n\pi x}{a}$ | 波函数 |
| $A = \sqrt{2/a}$ | 归一化系数 |
| $E_n = \dfrac{n^2h^2}{8ma^2}$ | 能级 |
| $\int_0^a \sin^2\dfrac{n\pi x}{a}\,dx = \dfrac{a}{2}$ | 必记积分 |

**例 22.1** 算能级　数字练习

势阱宽度 $a$=0.2 nm，求基态和第一激发态的能量（电子）。

$$E_1 = \frac{h^2}{8m_e a^2} = \frac{(6.63\times10^{-34})^2}{8\times9.1\times10^{-31}\times(2\times10^{-10})^2} \approx 1.5\times10^{-18}\ \text{J} \approx 9.4\ \text{eV}$$

$E_2 = 4E_1 \approx 37.6$ eV。

能级间隔几 eV，和光学跃迁同量级 —— 所以量子点会发不同颜色的光（尺寸决定颜色）。

⚠ **三个坑：**

① **积分用错区间。**只在 $0<x<a$ 里积，外面波函数为 0。

② **忘了 $E_n \propto n^2$。**第二能级是基态的 4 倍，不是 2 倍。

③ **以为基态能量为 0。**零点能不为零。

**自测 · 3 道**

1. 归一化常数 $A$ 与量子数 $n$ 有关吗?
2. $n=3$ 的能级是基态的几倍?
3. 势阱宽度加倍，基态能量变成原来的几分之几?

**1.** 无关，都是 $\sqrt{2/a}$。

**2.** 9 倍（$n^2$）。

**3.** $1/4$。

## 2024 卷 · 真题 1 道

### 2024 · 填10　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

在宽度为 $a$ 的一维无限深方势阱中运动的电子，已知其波函数在区间 0 到 $a$ 内为 $\psi(x)=A\sin\dfrac{n\pi x}{a}$（$n$ 为量子数，$A>0$），其余区间 $\psi(x)=0$，则归一化系数 $A=$ ____。

**一句话：归一化就是让 $|\psi|^2$ 在全空间积分为 1。**

① 第一步：阱外 $\psi=0$，只需在 0 到 $a$ 上积分。

② 关键式子：$A^2\int_0^a \sin^2\dfrac{n\pi x}{a}\,dx = A^2\dfrac{a}{2}=1$

③ 得出：$\boldsymbol{A=\sqrt{\dfrac{2}{a}}}$（取正，与 $A>0$ 一致，且与 $n$ 无关）。

## 2023 卷 · 真题 1 道

### 2023 · 填9　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

粒子在无限深势阱中，$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a}$ $(-a\le x\le a)$，出现在区间 $[-\frac{a}{6},\frac{a}{6}]$ 的几率为 _____。

**一句话：波函数模方在区间上做积分。**

① 先确认已归一：$\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\cos^2\frac{3\pi x}{2a}dx=1$。

② 降次：$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$。

③ 关键式子：$P=\frac{1}{2a}[x+\frac{a}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{a}]_{-a/6}^{a/6}$ ④ 得出：$\mathbf{\frac{1}{6}+\frac{1}{3\pi}}$。

注意：大于 $\frac{1}{6}$，因为概率集中在 $x=0$。

## 2022 卷 · 真题 1 道

### 2022 · 填10　3 分

○ 会　○ 卡　○ 不会

已知粒子在一维矩形无限深势阱中运动，其波函数为：$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a}$ $(-a\le x\le a)$，那么粒子在 $x=5a/6$ 处出现的几率密度为____。

**考波函数的统计解释：几率密度就是 $|\psi(x)|^2$，代入坐标即可，不需要积分。**

先算相位：$\frac{3\pi}{2a}\cdot\frac{5a}{6}=\frac{5\pi}{4}$，$\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

平方得 $\frac{1}{2}$，于是 $|\psi|^2=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2a}$ **答案为** $\mathbf{\frac{1}{2a}}$。

注意：题目问的是"几率密度"而不是"几率"，后者要在某段区间上积分；另外几率密度是 $|\psi|^2$，余弦的负号平方后自然消失。

## 22　整卷速查：24 道题一句话

考前 20 分钟

每道题只留"该写什么"，最后过一遍用。

## 选择题（10 题 · 30 分）

| 题 | 该想到的 | 答案 |
|---|---|---|
| 1 | 通量只看面内；场强看所有电荷 | D |
| 2 | 两板场强反向相减，再乘 $d$ | D |
| 3 | $\sigma_{自由}=\varepsilon_0\varepsilon_r E$ | B |
| 4 | $H=NI/l$（不带 $\mu_0$） | D |
| 5 | 环路只套住 $(2/3)I$ 那一路 | B |
| 6 | $evB=mv^2/R$ 求 $B$，再乘 $\pi R^2$ | D |
| 7 | MN 有电动势；回路磁通不变 | B |
| 8 | $E_k=(\gamma-1)E_0$，$\gamma=3\Rightarrow$ 2 倍 | A |
| 9 | 巴耳末：$\frac{1}{4}$ 与 $\frac{5}{36}$ 之比 | B |
| 10 | L 层 $n=2$，$l<n$，$\lvert m_l\rvert\le l$ | C |

## 填空题（10 题 · 30 分）

| 题 | 该想到的 | 答案 |
|---|---|---|
| 1 | 重心 $\frac{\sqrt{3}}{3}r$；两力合成乘 $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}q$ |
| 2 | $E_x=-\partial U/\partial x$ | $\lvert\frac{\partial U}{\partial x}\rvert$ |
| 3 | $M\propto IS$，$2\times2$ | 4:1 |
| 4 | 磁通最大 $\Rightarrow d\Phi/dt=0$ | 无感应电流 |
| 5 | 尺缩 + 追及 | $\frac{2\Delta t\, l_0}{\Delta t^2+l_0^2/c^2}$ |
| 6 | $\lambda_m T=b$ | 减小 |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | $U_a=\frac{h}{e}\nu-\frac{A}{e}$ | $h/e$ |
| 8 | $\Delta\lambda=\lambda_c(1-\cos 90^\circ)$ | $\lambda_0$ 和 $\lambda_0+\lambda_c$ |
| 9 | $E^2=p^2c^2+E_0^2$ | $\frac{hc}{\sqrt{E_k^2+2E_kE_0}}$ |
| 10 | $\int_0^a \sin^2=\frac{a}{2}$ | $\sqrt{2/a}$ |

## 计算题（4 题 · 40 分）

| 题 | 四步流程 |
|---|---|
| 1 | ① 说清"用球心算"（等势体）；② 球面贡献 $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$；③ 环贡献 $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2+r^2}}$；④ 相加 |
| 2 | ① $H$ 分区（$r<R_1$ 按面积、介质区 $1/r$、外部 0）；② $w=\frac{1}{2}\mu H^2$；③ $dV=2\pi rl\,dr$ 积分；④ $L=2W/I^2$ |
| 3 | ① 平移 ⇒ 弧段 = 直线段；② $2vBR\sin\alpha$；③ 同样求 $bc$ 段；④ 令相等 ⇒ $\alpha=45^\circ$ |
| 4 | ① 写 $\Delta x=l\cos\theta$，$\Delta t=l/c$；② 时间变换；③ $l'=c\Delta t'$ |

**进考场前最后看的 8 条**

| | |
|---|---|
| $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0$ | 高斯定理 |
| $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$ | 安培环路 |
| $\varepsilon=-d\Phi/dt$ | 法拉第 |
| $\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ | 相对论 |
| $\Delta\lambda=\lambda_c(1-\cos\varphi)$ | 康普顿 |
| $h\nu=A+eU_a$ | 光电效应 |
| $\lambda=h/p$ | 德布罗意 |
| $A=\sqrt{2/a}$ | 势阱归一化 |

**最后一句：**这张卷子 **60 分靠概念、40 分靠流程**。概念题（选择填空）只要你把每讲的"必背"记住了，就能拿；计算题只要你把"四步流程"写出来，即使算错也有分。**所以：先保 60，再抢 40。**